

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_188086

UNIVERSAL
LIBRARY

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

تفرقی مساواتیں

ایڈورڈ کے تکمیلی احصا کے آخری پانچ بابوں کا اردو ترجمہ

از

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے

پروفیسر ریاضیات، کلکتہ جامعہ عثمانیہ

حیدر آباد دکن

۱۳۲۱ھ ۱۳۲۲ھ ۱۹۲۳ء

۱-۲-۱۷

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

یہ کتاب سرسٹیکلن کمپنی کی اجازت سے
جن کو حقوق کاپی رائٹ حاصل ہیں
طبع کی گئی ہے۔

مضامین

تفرقی مساواتیں

صفحہ	مضمون
۱	باب اول - رتبہ اول کی تفرقی مساواتیں
۶	تفرقی مساوات کی تشکیل -
۷	تغیر جہائی پذیر
	نظمی مساواتیں
۱۴	باب دوم - رتبہ اول کی تفرقی مساواتیں (سلسل)
۲۱	تجانس مساواتیں
۲۶	ایک حرف غائب
۲۶	کلیروی صورت
۳۶	باب سوم، رتبہ دوم کی مساواتیں، ٹھیک تفرقی مساواتیں
۳۴	خطی مساواتیں
۳۴	ایک حرف غائب
۳۷	خطی مساوات کی عام سے عام صورت، کسی ایک رقم کا
۳۹	نکال دینا -
	ٹھیک تفرقی مساواتیں

۴۴	باب چہارم - مستقل سروں والی خطی تفرقی مساواتیں
۴۵	متعمم تفاعل کی عام صورت
۵۶	خاص تکملی
۶۳	ایسی مساوات جو مستقل سروں والی خطی مساوات کی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے
۶۶	باب پنجم - قائم مری متفرق مساواتیں
۸۱	علم حرکت کی چند مشہور مساواتیں
۸۳	مزید توضیحی مثالیں
۹۲	جوابات

تفرقی مساواتیں

باب اول

پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں
متغیر جدائی پذیر۔ خلی مساواتیں

۱۔ تکملی احصا کے اختتام پر چند معمولی قسم کی تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کے عام طریقوں کا سرسری ذکر کر دینا مقصود ہے، اس طرح کی مساواتیں طالب علم کو تحلیلی سکونیات، ذرہ کے علم حرکت اور استوار اجسام کے علم حرکت (کے ابتدائی حصوں) کے مطالعہ میں کارآمد ہوں گی۔

اس جگہ ہم ان تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کی مطلق کوشش نہیں کریں گے جن میں جزوی، تفرقی سر شامل ہوتے ہیں۔

۲۔ تفرقی مساوات کی تکنیکوں
ذرا سی دیر کے لئے ہم اس موضوع پر غور کریں گے کہ تفرقی مساوات کس طرح پیدا ہوتی ہے اور اس کے ”حل“ کی نوعیت کیا ہونی چاہئے۔

اس طرح کی مساوات

ف (لا، ما، ا) = (۱)

جس میں تفاعل کی شکل معلوم ہے منحنیات کے ایک خاص قبیل کو تعبیر کرتی ہے، اس قبیل کے کسی ایک رکن کے لئے ا کی ایک خاص قیمت ہے جو ایک ہی منحنی کے تمام نقاط کے لئے وہی رہتی ہے لیکن اس قبیل کے مختلف منحنیات کے لئے مختلف ہے۔

علم ریاضی میں ایسے سوالات اکثر واقع ہوتے ہیں جن میں منحنیات کے پورے قبیل پر بالتمام عمل کرنا مقصود ہوتا ہے۔

مثلاً ایک سوال یہ ہے، منحنیات کا ایک ایسا قبیل معلوم کرو جس کا ہر ایک رکن ایک معلوم قبیل کے ہر ایک رکن کو ایک زاویہ معلومہ (مثلاً زاویہ قائمہ) پر قطع کرے۔ ظاہر ہے کہ اس طرح کے عملوں میں منحنی کو مخصوص کرنے والا حرف ا تفاعل زیر بحث میں بطور ایک مستقل مقدار کے واقع نہیں ہونا چاہئے ورنہ پورے قبیل پر ایک بجا عمل کرنے کی بجائے ہم اس قبیل کے ایک خاص رکن پر عمل کر رہے ہوں گے۔ ا اس طرح ساقط ہو سکتا ہے۔

مساوات کو ا کے لئے حل کرو اور اسے شکل ذیل میں لکھو

ف (لا، ما) = (۲)

بمطابق لا کے تفرق کرنے سے ا نکل جاتا ہے اور (۱) کی بجائے ایک مساوات لا، ما اور ما میں حاصل ہوتی ہے۔ یہ ممکن ہے کہ تفرقی مساوات کے بنائے میں ا کے لئے مساوات حل نہ ہو سکے۔ اس صورت میں

مساوات ف (لا، ما، ا) = (۱)

کا لحاظ لا کے تفرق کرنے سے حاصل ہوگا

$$\text{جف ف} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \times \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \dots\dots\dots (۳)$$

اب مساواتوں (۱) اور (۳) سے $\frac{لا}{لا}$ کو ساقط کرنے سے ایک ربط
 $\frac{لا}{لا} = \frac{ما}{ما}$ میں حاصل ہوتا ہے جو سارے قبیل کے لئے درست ہے۔
 مثال کے طور پر خطوط مستقیم کے ایک ایسے قبیل پر غور کرو جو مساوات
 میں اختیاری مستقل $\frac{ما}{ما}$ کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{ما}{لا} = \frac{ما}{لا} = \frac{ما}{لا}$$

$$\frac{لا}{لا} = \frac{لا}{لا} = \frac{لا}{لا}$$

یا بطرز دیگر $\frac{ما}{لا} = \frac{ما}{لا}$ کے لئے حل کرنے کے بغیر

$$\frac{ما}{لا} = \frac{ما}{لا}$$

یہ مساوات ان تمام خطوط مستقیم کی تفرقی مساوات ہے جو مبدأ میں
 سے گذرتے ہیں اور اس کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ مبدأ میں سے
 گذرنے والے کسی خط مستقیم کی سمت اس کے کسی نقطہ پر وہی ہے
 جو اس نقطہ اور مبدأ کو ملائے والے سمتی کی ہے۔

۳۔ اب فرض کرو کہ منحنیات کے قبیل کو تعبیر کرنے والی مساوات

$$ف(لا، ما، ا، ب) = ۰ \dots \dots (۱)$$

ہے جس میں دو اختیاری مستقل $\frac{لا}{لا}$ و $\frac{ا}{ا}$ ہیں اور قبیل کے مختلف
 منحنی ان مستقلات کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔ بلحاظ
 لائحہ اوپر کی مساوات کا ایک دفعہ تفرق کرنے سے $\frac{لا}{لا}$ ، $\frac{ما}{ما}$ ، $\frac{ا}{ا}$ و $\frac{ب}{ب}$
 میں ایک ربط حاصل ہوگا فرض کرو کہ یہ ربط ہے

$$ف(لا، ما، ا، ب) = ۰ \dots \dots (۲)$$

اگر ایک دفعہ اور بلحاظ لا کے اس کا تفرق کیا جائے تو
لا، ما، با، وا، ب میں ایک ربط ملے گا، فرض کرو کہ یہ حسب
ذیل ہے

صہ (لا، ما، با، وا، ب) = (۳)
ان تین مساواتوں سے وا، ب ساقط ہو سکتے ہیں کم از کم نظری لحاظ
سے (اگر یہ پہلے سے عمل تفرق میں ساقط نہیں ہو چکے) اس طرح
لا، ما، با، وا کو باہم منسلک کرنے والا ایک ربط مثلاً

ف (لا، ما، با، وا) =
حاصل ہوگا جو قبیل مفروض کی تفرقی مساوات ہوگی۔

۴۔ مساوات کا رتبہ

تعریف کے طور پر ہم اسے مان لیتے ہیں کہ تفرقی مساوات کا رتبہ
اُس اعلیٰ ترین تفرقی سرے سے متعین ہوتا ہے جو اس میں واقع ہوتا ہے۔
ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اگر دو مجہولوں کی کسی مساوات میں ایک اختیار کی
مستقل واقع ہو تو اس مستقل کو ساقط کرنے پر پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات
حاصل ہوتی ہے اور اگر مساوات میں دو اختیاری مستقل واقع ہوں تو انہیں
ساقط کرنے پر دوسرے رتبہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

یہ استدلال بالکل عام ہے، ان اختیاری مستقلات کو ساقط کرنے کیلئے
ہمیں ان دفعہ تفرق کرنا ہوگا اور اس طرح لا، ما، با، وا.... ملے گا
باہم ربط دینے والی ایک تفرقی مساوات حاصل ہوگی جس کا رتبہ صیرکاً
ن ہوگا۔

مثال ۱۔ مساوات لا + ما = ۲ + لا + ج سے وا اور ج کو
ساقط کرو۔

تفرق کرنے سے لا + ما + ما = وا

دوبارہ تفرق کرنے سے ۱ + ما + ما = ۰

صرف عمل تفرق سے ہی مستقل غائب ہو چکے ہیں، اور یہ دوسرا

رتبہ کی تفرقی مساوات ہے (واضح ہو کہ بڑے سے بڑا تفرقی سراسر اس میں
 نام ہے) جو ان تمام دائروں سے متعلق ہے جن کے مرکز لا، محور پر
 واقع ہوتے ہیں۔

مثال ۲۔ ان تمام مرکزدار مخروطی تراشوں کی تفرقی مساوات معلوم
 کر دو جن کے محور محدود کے محوروں پر منطبق ہوتے ہیں۔

مخروطیوں کے اس قبیل کے کسی ایک رکن کی نمونہ کی مساوات ہوگی

$$لا + ب = ما = ا$$

تفرق کرنے سے $لا + ب = ما = ا$

دوبارہ تفرق کرنے سے $ا + ب = (ما + ما) = ا$

جس سے $لا (ما + ما) = ما = ا$

مطلوبہ تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

۵۔ عمل اسقاط الٹ نہیں سکتا۔

بالعموم اوپر کا عمل اسقاط الٹ نہیں سکتا اور جب ایک قبیل کی
 تفرقی مساوات دی ہوئی ہو اور ہم اس کے کسی ایک رکن کی نمونہ کی
 مساوات معلوم کرنا چاہیں تو ہمیں عمل تکمیل کی طرح چند معیاری صورتوں
 سے کام لے بغیر چارہ نہیں ہوتا اور کئی مساواتیں ایسی پیدا ہوتی ہیں
 جنہیں ہم مطلق حل نہیں کر سکتے۔

مثلاً ہم اوپر کی دفعات سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر ن ویں رتبہ
 کی تفرقی مساوات کو حل کرنا مقصود ہو تو ہمیں لا، ما اور ن اختیار کی
 مستقلات میں ایک ایسا جبریہ ربط معلوم کرنا چاہیے کہ ان مستقلات
 کو ساقط کرنے پر مفروضہ تفرقی مساوات حاصل ہو سکے۔ ایسا جبریہ
 ربط مساوات کا عام سے عام حل خیال کیا جاتا ہے۔

پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

۶۔ انکی پانچ معیاری صورتیں ہیں
صورت اول۔ متغیر جدائی پذیر

وہ تمام مساواتیں جن میں فر لا اور لا والی تمام رتھیں مساوات کے ایک طرف اور فر ما اور ما والی تمام رتھیں دوسری طرف لائی جائیں اس صورت کے تحت میں آتی ہیں اور تکمیل کرنے سے فوراً حل ہو سکتی ہیں

مثال ۱۔ مثلاً اگر $\frac{قط\ ما}{قط\ لا} = \frac{فر\ ما}{فر\ لا}$

تو $\frac{جھم\ لا}{جھم\ ما} = \frac{فر\ لا}{فر\ ما}$
تکمیل کرنے سے ربط جب لا = جب ما + و
ماصل ہوتا ہے جس میں ایک اختیاری مستقل و شامل ہے۔

مثال ۲۔ اگر $\frac{لا + ا}{ا + ا} = \frac{لا\ ما}{فر\ لا}$

تو $(\frac{لا}{ا} + \frac{ا}{ا}) فر\ لا = (ما + ا) فر\ ما$

اس لئے $\frac{لا}{ا} + \frac{ا}{ا} = \frac{لا\ ما}{فر\ لا} + \frac{ا\ ما}{فر\ لا}$
جس میں ایک اختیاری مستقل و شامل ہے۔

مثلاً

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو
۱۔ لا جھم ما فر لا = ما جھم لا فر ما

$$۲ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا۱ + لا۲}{۱ + لا۱ + لا۲} = ۳ - \frac{فرما}{فرلا} + \frac{فرما}{فرلا} = \frac{۱ + لا۱ + لا۲}{۱ + لا۱ + لا۲} = ۰$$

۲۔ ثابت کرو کہ مثال ۳ کے قبیل منحنیات کا ہر ایک رکن مثال ۲ کے ہر رکن کو علی القوانم قطع کرتا ہے۔

$$۵ - لا۱ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{۱ + لا۱}{۱ + لا۱} = (۱ + لا۱ + لا۲)$$

$$۶ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا۱ - لا۲}{لا۱ + لا۲}$$

۷۔ ثابت کرو کہ وہ تمام منحنی جن میں عماد کا مربع سمتی نیم قطر کے مربع کے مساوی ہے یا تو دائرے ہیں یا قائم زائد۔

۸۔ ثابت کرو کہ ایک ایسا منحنی جس کے کسی نقطہ پر کا ماس اس نقطہ کے سمتی نیم قطر کے ساتھ مستقل زاویہ (عمہ) بنائے صرف اس سمت $r = ۱$ و $r = ۰$ سے متعلق ہو سکتا ہے۔

۹۔ ان منحنیات کی مساواتیں معلوم کرو جن میں

(۱) کارٹینری زیر ماس مستقل ہو

(۲) کارٹینری زیر عماد مستقل ہو

(۳) قطبی زیر ماس مستقل ہو

(۴) قطبی زیر عماد مستقل ہو

۱۰۔ اس منحنی کی کارٹینری مساوات معلوم کرو جس کے ماس کا طول مستقل ہو۔

صورت دوم۔ خطی مساواتیں

حسب ذیل شکل کی مساوات

$$لا۱ + لا۲ + لا۳ + ... + لا۲ + لا۱ + ق۱ + ق۲ + ... + ق۲ + ق۱ = ۰$$

جہاں 'ق'، 'ک'، 'ر' متغیر لا کے تفاعل یا مستقل مقدار میں ہیں خطی مساوات کہلاتی ہے، اس مساوات کی خصوصیت یہ ہے کہ اس میں تفرقی سروں کی ایک سے بڑی قوت شریک نہیں ہوتی فی الحال چونکہ ہم پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتوں پر غور کر رہے ہیں اس لئے خطی مساوات کی صورت زیر بحث یہ ہوگی

اگر اس کے دونوں جانب کوکٹ فلا سے ضرب دیدیا جائے
تو مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{م}{فلا} (ما کوکٹ فلا) = ق کوکٹ فلا$$

$$پس ما کوکٹ فلا = ق کوکٹ فلا + ر$$

یہ 'لا' کا باہمی ربط تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے اور اس میں ایک اختیاری مستقل شامل ہوتا ہے۔ اس لئے یہ مطلوبہ حل ہے۔

جزو ضربی کوکٹ فلا کے ساتھ ضرب دینے سے مساوات

کے دائیں جانب کا رکن پورا تفرقی سر ہو جاتا ہے، اس لئے اسے

مشکل جزو ضربی "کہتے ہیں۔ لا کو مشکل کرو۔

مثال ۱۔ $ما + لا = لا$ کو مشکل کرو۔
مشکل جزو ضربی یہاں کوکٹ فلا یا $\frac{لا}{۲}$ ہے اور اس لئے مساوات

اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\frac{م}{فلا} (ما کوکٹ فلا) = لا کوکٹ فلا$$

$$یا ما کوکٹ فلا = لا کوکٹ فلا + ر$$

$$\text{یعنی } 1 + 1 = 2 \quad 1 - 1 = 0$$

$$\text{مثال ۲ - } \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 2 \quad \frac{1}{x} = 1 \text{ کو مکمل کرو۔}$$

اس جگہ شکل جزو ضربی کو $\frac{1}{x}$ فرما = $\frac{1}{x}$ لوک لا = لا ہے اور مساوات

اس طرح لکھی جاسکتی ہے $\frac{1}{x} = (1 + 1) = 2$

$$\text{اور لا } 1 = \frac{1}{x} + 1 \quad \text{یا } 1 = \frac{1}{x} + 1$$

۸۔ ایسی مساواتیں جو خطی صورت میں تحویل ہو سکتی ہیں

کئی مساواتیں جو دیکھنے میں خطی شکل

$$\frac{1}{x} + 1 = 2$$

کی نہ ہوں متغیروں کو بدلنے سے فوراً اس شکل میں لائی جاسکتی ہیں۔
ایک مشہور صورت ذیل میں مندرج ہے

$$\frac{1}{x} + 1 = 2$$

$$\text{یا } 1 = \frac{1}{x} + 1$$

$$\text{رکھو } 1 = 1$$

$$\text{تو } 1 = 1$$

$$\text{یا } \frac{1}{x} + 1 = 2 \quad (1 - 1) = 0$$

جو ایک خطی مساوات ہے اور اس کا حل یہ ہے
 $y = (1-n) \text{ کر } فرلا = (1-n) \text{ کر } ق \text{ فر} \quad (1-n) \text{ کر } فرلا \text{ فرلا} + 1$

یعنی $y = (1-n) \text{ کر } فرلا = (1-n) \text{ کر } ق \text{ فر} \quad (1-n) \text{ کر } فرلا \text{ فرلا} + 1$

مثال ۱۔ $\frac{y}{فرلا} + \frac{y}{لا} = 1$ کو تکمیل کرو

یہاں $y = \frac{1}{لا} + \frac{y}{فرلا} = 1$
 $y = 1 - \frac{y}{فرلا}$ رکھنے سے

$1 = \frac{y}{لا} - \frac{y}{فرلا}$

اور چونکہ شکل جزو ضربی ہو گا $\frac{1}{لا} = \frac{1}{فرلا} = \frac{1}{لوک لا} = \frac{1}{لا}$ ہے

اس لئے $\frac{y}{فرلا} = \left(\frac{y}{لا} \right) = 1 - \frac{1}{لا}$

یعنی $\frac{y}{لا} = 1 - \frac{1}{لا} = \frac{لا-1}{لا}$ لوک $\frac{1}{لا} + 1$

یعنی $\frac{1}{لا} = 1 - \frac{1}{لا} = \frac{لا-1}{لا}$ لا لوک لا

مثال ۲۔ مساوات $\frac{y}{فرلا} + لا جب ۲ = لا$ جم کو تکمیل کرو
 جم ما پر تقسیم کرنے سے

قطاً $y = لا + لا س = لا$
 رکھو $س = ی$

$$\text{تب } \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + ۲ \text{ لا سی} = \text{لا}^۳$$

شکل جزو ضربی کو ۲ لا فرلا ہے اس لئے

$$\text{سی فرلا} = \text{فرلا}^۲ + ۱$$

فرض کرو کہ $\text{لا}^۲ = \text{سہ}$

تب $۲ \text{ لا فرلا} = \text{فرسہ}$

پس $\text{فرلا}^۳ = \frac{۱}{۴} \text{ فرسہ} + \frac{۱}{۴} \text{ فرسہ} = \text{فرسہ}$

$$= \frac{۱}{۴} \text{ فرسہ} (۱ - \text{سہ})$$

$$\text{پس مس ما} \times \text{فرلا} = \frac{۱}{۴} \text{ فرلا} (۱ - ۲ \text{ لا}) + ۱$$

جو مساوات مفروضہ کا حل ہے۔
ظاہر ہے کہ اس قسم کی مساواتوں کو خطی (یا کسی اور معلومہ) صورت میں لانے کے لئے بڑی فراست اور تیز فہمی کی ضرورت ہوگی۔

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو مکمل کرو

$$۱- (۱ + \text{لا}^۲) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = \text{فرسہ}^۲ - ۲ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{زما} = \text{جب ب لا}$$

$$۳- \frac{\text{فرط}}{\text{فرط}} + \frac{۱}{ط} = ۱ طہ - ۴ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} + \frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \text{ما}$$

$$۵- (۱ + \text{ما}) + (\text{لا} - \text{فرلا}) = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - ۶ \left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}} - \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^۲} \right) = ۱$$

۷۔ ثابت کرو کہ دفعہ ۷ کے حل میں کوئی زیادہ عمومیت پیدا نہیں ہوتی اگر شکل جزو ضربی و مرکب فرلا کے حاصل کرنے میں قوت خاکے ساتھ ایک مستقل کا اضافہ کر دیا جائے۔

۸۔ ایسے منحنی معلوم کرو جن میں کارٹینری زیر عماد ایسے بدلے جیسے سمتی نیم قطر کا مربع۔
ذیل کی مساواتوں کو مکمل کرو

$$9 - \frac{y}{x} = \frac{1}{x} + \frac{y}{x^2} \quad 10 - \frac{y}{x} = \frac{1}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y}{x^3}$$

$$11 - \frac{y}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y}{x^3}$$

$$12 - \frac{y}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \text{ مس ما جب ما [رکھو، = جبئی]}$$

$$13 - \frac{y}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y}{x^3} \text{ (لوک ی) } \frac{y}{x^3} \text{ [رکھو ی = نو ۳]}$$

$$14 - \frac{y}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y}{x^3} \text{ (۱-۵) ی}$$

۱۵۔ ایسے منحنی معلوم کرو جن کے سمتی نیم قطر اور قطبی زیر عماس کے متکافوں کا مجموعہ مستقل ہو۔

۱۶۔ ایسے منحنیات کے قبیل کی قطبی مساوات معلوم کرو جن میں سمتی نیم قطر اور قطبی زیر عماد کا مجموعہ ایسے بدلے جیسے سمتی نیم قطر کی 'ن' دیں قوت۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ ایسے منحنی جن میں انحناء کا نیم قطر ایسے بدلتا ہو جیسے عماد پر کے عمود کا مربع ایک ایسی جماعت سے تعلق رکھتے ہیں جس کی پائیں مساوات $\frac{y}{x} + \frac{1}{x} = \frac{y}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ ہو کہ

ہے جہاں ک ایک معلومہ اور ۱ اختیاری مستقل ہے۔

۱۸۔ ذیل کی مساواتوں کو تکمیل کرو

$$(۱) \quad \frac{فرما}{فرلا} + \frac{۱}{لا} = \frac{فوا}{۲لا} \quad (۲) \quad \frac{فرما}{فرلا} + ۱ = فوا جب ب لا$$

$$(۳) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{مسما}{۱+لا} = فوا قطا$$

$$(۴) \quad \frac{فرما}{فرلا} - \frac{ف (دما)}{ف (دما)} = ف (دلا) قہ (دلا) \quad \frac{ف (دلا) قہ (دلا)}{ف (دما)}$$



باب دوم

پہلے رتبہ کی مساواتیں (سلسلہ)
تجانس مساواتیں - ایک حرف غائب
کلیریومی صورت

۹- صورت سوم - متجانس مساواتیں -
جو مساواتیں لا، ما میں تجانس ہوں وہ اس طرح لکھی جاسکتی ہیں

$$\text{لا} \text{ ف} \left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}} ; \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right) =$$

(۱) اگر ممکن ہو تو اس صورت میں ہم مساوات کو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کے لئے
حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں، اس طرح اس شکل کا نتیجہ حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{فہ} \left(\frac{\text{لا}}{\text{لا}} \right)$$

اس میں رکھو ما = ولا

تو حاصل ہوگا ولا لا $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = \text{فہ} (و)$

$$\text{یا} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}}$$

اس طرح متغیر الگ ہو جاتے ہیں اور مساوات کا حل صورت اول کی

$$\text{یا لا} \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = - \frac{\text{و}}{\text{و} + ۱}$$

$$\text{یا لا} \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = - \left(\frac{۱}{\text{و}} + \frac{۱}{\text{و} + ۱} \right) \text{فر و}$$

$$\text{یا لوک لا} = \frac{۱}{\text{و} + ۱} - \text{لوک و}$$

$$\text{یا و ما} = \frac{\text{و}}{\text{و} + ۱}$$

مثال ۲ - فرض کرو کہ مساوات یہ ہے

$$\frac{\text{و}}{\text{و} + ۱} + \frac{\text{و}}{\text{و} + ۱} = \frac{۱}{\text{و}}$$

یعنی $\text{و} = \text{لا} (\text{ع} + \text{ع}')$

$$\text{تب ع} = (\text{ع} + \text{ع}') + \text{لا} (\text{ع} + ۱) \frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}}$$

$$\text{یا لا} \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} + \left(\frac{۱}{\text{ع}} + \frac{۱}{\text{ع}'} \right) \text{فر ع} =$$

جس سے حاصل ہوتا ہے $\text{لوک لا} + ۲ \text{لوک ع} - \frac{۱}{\text{ع}} =$
یعنی $\text{لا ع} = \text{و}$

$$\begin{cases} \frac{\text{و}}{\text{و} + ۱} = \text{ع} + \text{ع}' \\ \text{لا ع} = \text{و} \end{cases}$$

اور

کے حاصل اسقاط حل مطلوب ہے۔

یہ حاصل اسقاط ہے $\text{لوک لا} = \left(\frac{\text{و} + \text{و} + ۱}{\text{و}} \right) \pm ۱ = \left\{ \left(\frac{\text{و} + \text{و} + ۱}{\text{و}} \right) \pm ۱ \right\} \frac{\text{لا}}{\text{و}}$

لیکن اگر جبر یہ طریق پر ع کو ساقط کرنا ممکن نہ ہو یا اگر ساقط کرنے پر ایک بے ڈھنگا سا نتیجہ حاصل ہو تو عام طور پر ع والی ان مساواتوں

کو بغیر بدلے اسی شکل میں چھوڑ دیتے ہیں، اور انہیں ایسی ہمزاد مساواتیں خیال کرتے ہیں جن کا ع حاصل استقامت تفرقی مساوات کا حل مطلوب ہے۔

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

$$۱- \frac{۵}{۳۵} = \frac{۵}{۳۵} \quad ۲- (۳۵ + ۵) = (۳۵ + ۵) \frac{۵}{۳۵}$$

$$۳- ۵ = \frac{۵}{۳۵} \quad ۴- ۵ = \frac{۵}{۳۵} + \left(\frac{۵}{۳۵} \right)$$

$$۵- ۵ = \frac{۵}{۳۵} \quad \left\{ ۱ + \left(\frac{۵}{۳۵} \right) + ۵ + \frac{۵}{۳۵} + ۵ \right\}$$

۱۰۔ خاص صورت

$$\text{مساوات } \frac{۵}{۳۵} = \frac{۵ + ۵ + ۵ + ۵ + ۵}{۳۵ + ۳۵ + ۳۵ + ۳۵ + ۳۵} \text{ آسانی سے جانس شکل میں}$$

اس طرح لائی جاسکتی ہے

$$\text{اس میں رکھو } \begin{cases} ۵ = ۵ + ۵ \\ ۵ = ۵ + ۵ \end{cases} \text{ جہاں } ۵ \text{، } ۵ \text{ متغیر ہیں اور } ۵ \text{، } ۵ \text{ مستقل۔}$$

$$\text{تب } \frac{۵}{۳۵} = \frac{۵ + ۵ + ۵ + ۵ + ۵}{۳۵ + ۳۵ + ۳۵ + ۳۵ + ۳۵}$$

$$\text{اب } ۵ \text{، } ۵ \text{ کی قیمتیں ایسی منتخب کرو کہ } ۵ + ۵ + ۵ + ۵ + ۵ = ۵ + ۵ + ۵ + ۵ + ۵$$

$$\text{پس } \frac{۵}{۳۵} = \frac{۵}{۳۵} = \frac{۵}{۳۵}$$

$$\text{تب} \quad \frac{\text{فرعاً}}{\text{فرضاً}} = \frac{\text{ا + ضا + ب عا}}{\text{ا + ضا + ب عا}}$$

یہ مساوات متجانس ہے، اس میں ہم رکھ سکتے ہیں $\text{عا} = \text{رضا اور}$
تغیر حسب سابق الگ ہو سکتے ہیں۔

۱۱۔ لیکن ایک صورت میں ع ، ک اس طرح منتخب نہیں ہو سکتے

$$\text{یعنی جبکہ} \quad \frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{ب}}{\text{ج}} + \frac{\text{ج}}{\text{ج}}$$

اس صورت میں فرض کرو کہ $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \text{م اور ا + لا + ب ما} = \text{عا}$

$$\text{تب} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}} \left(\frac{\text{فرعاً}}{\text{فرلا}} - \text{ا} \right)$$

$$\text{پس} \quad \left(\frac{\text{فرعاً}}{\text{فرلا}} - \text{ا} \right) \text{ب} = \frac{\text{عا + ج}}{\text{م عا + ج}}$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{فرعاً}}{\text{فرلا}} = \frac{(\text{ا م + ب عا + ا ج + ب ج})}{\text{م عا + ج}}$$

$$\text{اور فرلا} = \frac{\text{م عا + ج}}{(\text{ا م + ب عا + ا ج + ب ج})} \text{فرعاً}$$

تغیر اب الگ ہو سکتے ہیں اور مساوات کا مکمل عمل میں آ سکتا ہے۔

۱۲۔ ایک اور صورت قابل توجہ ہے یعنی

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ا + لا + ب ما + ج}}{\text{ب لا + ب ما + ج}}$$

جہاں شمار کنندہ میں ما کا سر نسب نامہ لا کے سر کے مساوی
اور مختلف علامت ہے۔

اس صورت میں مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$(\text{ا + لا + ج}) \text{فرلا} + \text{ب (ما فرلا + لا فرما)} = (\text{ب ما + ج}) \text{فرما}$$

مثال ۲۔ تکمیل کرو $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا + ما}{۱ - ما - لا}$ کو
فرض کرو کہ $لا + ما = ی$ ، تب

$$\frac{فری}{فرلا} = ۱ + \frac{ی}{۱ - ی} = \frac{۱ - ی + ی}{۱ - ی}$$

اور $فرلا = \frac{۱ - ی}{۱ - ی} فری = \frac{۱}{۲} [۱ - \frac{۱}{۱ - ی}] فری$

$$لا = \frac{۱}{۲} ی - \frac{۱}{۲} لوک (۱ - ی) + ۱$$

جہاں $ی = لا + ما$

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو تکمیل کرو۔

$$۱ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا + ما}{۳ - ما - لا} \quad ۲ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا + ما}{۳ - ما - لا}$$

$$۳ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا + ما}{۳ - ما - لا} \quad ۴ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا + ما}{۳ - ما - لا}$$

$$۵ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا + ما}{۱ - ما - لا} \quad ۶ - \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا + ما}{۱ + ما + لا}$$

$$۷ - (۵ - ما + لا) \frac{فرما}{فرلا} + ۳ لا + ما - ۵ = ۰$$

$$۸ - (۵ - ما + لا) \frac{فرما}{فرلا} + ۲ لا + ما - ۱ = ۰$$

۹۔ ثابت کرو کہ ایک ذرہ 'لا' ما جو اس سطح حرکت کرتا ہے کہ

$$\frac{فرما}{فرت} = لا + ما + گ$$

$$\frac{لا}{مرت} = - (ص لا + ب ما + فت)$$

ہمیشہ ایک مخدوطی تراش پر واقع ہوتا ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ عام متجانس مساوات $ف (\frac{ما}{لا} , \frac{لا}{مرت}) = ۰$ کے حل ہمیشہ متشابہ منحنیات کے قبیل کو تعبیر کرتے ہیں۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ $ف (\frac{ما}{لا} , \frac{لا}{مرت}) = ۰$ کے حل 'لا' اور

ایک مستقل کی کسی خاص قوت میں متجانس ہیں۔ برعکس اس کے اگر ایک قبیل منحنیات کے کسی رکن کی نمونہ کی مساوات 'لا' اور ایک مستقل کی کسی خاص قوت کے لحاظ سے متجانس ہو تو اس قبیل کی تفرقی مساوات بھی متجانس ہوگی اور قبیل کے منحنی سب ایک دوسرے کے متشابہ ہوں گے۔

۱۲۔ بتاؤ کہ 'ب' کی مختلف قیمتوں کے لئے منحنیات کے قبائل ذیل میں سے کون کون سے متشابہ بنوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

$$(۱) ما = ۲ لا \quad (۲) ما = ۱ جمر \frac{لا}{مرت}$$

$$(۳) \frac{لا}{مرت} + \frac{ما}{ب} = ۱ \quad (۴) ما = ۲ لا \text{ لوک } \frac{لا}{مرت}$$

$$(۵) ب مس = \frac{لا}{مرت} = ۱ + ما \quad (۶) لا + ما = ۳ لا$$

۱۳۔ صورت چہارم۔ ایک حرف غائب

لا غائب

(۱) فرض کرو کہ تفرقی مساوات میں لا موجود نہیں ہے، اس صورت

ہیں مساوات کی شکل یہ ہوگی

$$ف(ما، \frac{فرما}{فرلا}) = ۰$$

اسے ہم $\frac{فرما}{فرلا}$ یا ما کے لئے جیسا مناسب ہو حل کر سکتے ہیں۔

(۱) اگر $\frac{فرما}{فرلا}$ کے لئے حل کیا جائے تو مساوات کی صورت یہ ہوگی

$$\frac{فرما}{فرلا} = فہ(ما)$$

$$تب \quad فرلا = فہ(ما) \frac{فرما}{فرلا}$$

$$اور تکلی ہے لا = فر فرما + ۱$$

(۲) اگر $\frac{فرما}{فرلا}$ کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو ہم ما کے لئے حل کر سکتے ہیں، ایسا کرنے سے حاصل ہوگا ما = فہ(ع) جہاں ع تفرقی سر $\frac{فرما}{فرلا}$ کی بجائے لکھا گیا ہے۔

بملاحظہ لا کے جو مساوات میں موجود نہیں تفرقی کرنے سے

$$ع = فہ(ع) \frac{فرع}{فرلا}$$

$$یعنی \quad فرلا = فہ(ع) \frac{فرع}{ع}$$

$$پس \quad لا = فر فہ(ع) + ۱$$

تکمل کا عمل پورا کرنے پر ہم E کو اس مساوات اور $Ma = Fh$ (ع) سے ساکت کرتے ہیں، اس طرح مساوات مفروضہ کا 'حل حاصل ہوتا ہے۔

۱۴۔ ما غائب

(ب) فرض کرو کہ تفرقی مساوات میں Ma موجود نہیں ہے،

اس صورت میں اس کی شکل ہوگی $Fh = (La, \frac{Ma}{L}) = 0$ ۔

چونکہ $\frac{Ma}{L} = \frac{1}{L} \times Ma$ اسلئے اوپر کی مساوات اس طرح بھی لکھی

جاسکتی ہے $Ma = (La, \frac{Ma}{L}) = 0$ ۔

پس اگر Ma کو متغیر متبوع مانا جائے تو دفعہ ماقبل کی تشریح کا اطلاق اس پر بھی ہوتا ہے اور وہ اس طرح۔

(۱) بشرط سہولت $\frac{Ma}{L}$ کے لئے حل کرنے سے اس طرح کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{Ma}{L} = Fh = (La)$$

$$تب \quad \frac{Ma}{L} = Fh = (La)$$

$$اور تکمیلی ہے \quad Ma = Fh + \frac{Ma}{L} \times L$$

(۲) لیکن اگر $\frac{Ma}{L}$ کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو

لا کے لئے حل کرنے سے ہم اس طرح کا نتیجہ حاصل کرتے ہیں لا = فہ (ق)
 جہاں ق، $\frac{ق}{ق-لا}$ کے لئے لکھا گیا ہے۔ بلحاظ ما کے جو مساوات
 میں موجود نہیں ہے تفرق کرنے سے

$$ق = فہ (ق) \frac{ق}{ق-لا}$$

$$\text{اس طرح درما} = \frac{فہ (ق)}{ق} \text{ فرق}$$

$$\text{اور ما} = \frac{ق-فہ (ق)}{ق} \text{ فرق} + ۱$$

متکمل کا عمل پورا کرنے پر ہمیں ق کو اس مساوات اور لا = فہ (ق)
 سے ساقط کرنا چاہئے، اس طرح تفرقی مساوات کا حل مطلوب
 حاصل ہوگا۔

طالب علم دیکھے کہ دونوں صورتوں میں خواہ لا موجود نہ ہو
 یا ما، ہم حتی الامکان سب سے پہلے $\frac{ق}{ق-لا}$ کے لئے حل کرنے کی
 کوشش کرتے ہیں، لیکن اگر یہ عمل تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو باقی
 ماندہ حرف کے لئے حل کرنے کے بعد ہم اُس حرف کے لحاظ
 سے جو مساوات میں موجود نہ ہو تفرق کرتے ہیں، پس
 ہر صورت میں جو حرف مساوات میں موجود نہیں ہوتا اُسے
 متغیر متبوع خیال کیا جاتا ہے۔

$$\text{مثال ۱۔ مساوات ۱ + لا۔ لا} \frac{ق}{ق-لا} = \text{کو متکمل کرو}$$

$$\text{اسجگہ} \frac{ق}{ق-لا} = \frac{لا}{۱+لا} \text{ یعنی درما} = (لا + \frac{۱}{لا}) \text{ درلا}$$

اور $ما = \frac{لا}{۲} + لوک لا + ۱$ حل مطلوب ہے

مثال ۲۔ حل کرو $لا = \frac{ما}{۲}$ $۱ + (\frac{ما}{۲}) = کو$ ۔
مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$لا = ق + \frac{۱}{ق}$ جہاں $ق = \frac{ما}{۲}$
یہاں مساوات میں ما موجود نہیں ہے۔ اس کے لحاظ سے تفرق کرتے سے

$$ق = (۱ - \frac{۱}{ق}) \cdot \frac{ما}{۲}$$

$$یا \frac{ما}{۲} = \frac{۱}{ق} - \frac{۱}{ق}$$

$$اور ما = لوک ق + \frac{۱}{ق} + ۱$$

اس مساوات اور مساوات $لا = ق + \frac{۱}{ق}$ کا
ق حاصل اسقاط حل مطلوب ہے۔

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$۱۔ \frac{ما}{۲} + ما = \frac{ما}{۲} - ۲ \quad ۲۔ لا + \frac{۱}{لا} = \frac{ما}{۲}$$

$$۳۔ \sqrt{لا + ۱} = \frac{ما}{۲} + لا = ۰$$

$$۴۔ (۲ لا + لا^۲) \cdot \frac{ما}{۲} = ۲ لا + ۱$$

$$۵- (۲ + ۱ + ۱) \frac{۱}{۱} = ۱ + ۲ + ۱$$

$$۶- ۱ = ۱ + ۱ - \left(\frac{۱}{۱}\right) - \left(\frac{۱}{۱}\right) \text{ جم } \left(\frac{۱}{۱}\right)$$

$$۷- ۱ = ۱ + \left(\frac{۱}{۱}\right) + \left(\frac{۱}{۱}\right) \text{ ب } \left(\frac{۱}{۱}\right)$$

$$۸- ۱ = \left(\frac{۱}{۱}\right) + ۱ + ۱ \text{ ب } \frac{۱}{۱}$$

$$۱۵- \text{ صورت پنجم - کلیدی صورت } ۱ = ۱ + \frac{۱}{۱} + \left(\frac{۱}{۱}\right)$$

$$\frac{۱}{۱} \text{ کے لئے ع لکھنے سے}$$

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ \text{ (ع) } \dots \dots \dots (۱)$$

بلحاظ ۱ کے تفرق کرنے سے

$$ع = ۱ + ۱ + \frac{۱}{۱} \text{ (ع) } \frac{۱}{۱}$$

$$یا \{ ۱ + ۱ + ۱ \} \frac{۱}{۱} = \dots \dots \dots (۲)$$

$$\text{جس سے } \frac{۱}{۱} = ۱ + ۱ + ۱ \text{ (ع) } =$$

$$\text{اب } \frac{۱}{۱} = \text{ سے حاصل ہوتا ہے } ۱ = ۱ + ۱ + ۱ \text{ ج جہاں ج مستقل ہے}$$

$$\text{پس } ۱ = ۱ + ۱ + ۱ \text{ (ج) تفرقی مساوات کا ایک حل ہے جہاں ج مستقل ہے۔}$$

تیز اگر ع کو مساوات

لا + ف (ع) = (۳) لا کا ایک تفاعل ہوگا
 سے لا کی رقوم میں معلوم کیا جائے تو ع ، لا کا ایک تفاعل ہوگا
 اور اگر ع کی یہ قیمت مساوات (۱) میں مندرج کی جائے اور جو
 ایک ہی بات ہے کہ ع کو مساواتوں (۱) اور (۳) سے ساقط کیا
 جائے تو ہمیں لا ، ما میں ایک ربط حاصل ہوگا اور یہ بھی تفرقی
 مساوات کو پورا کرے گا۔
 اب ع کو مساواتوں

$$ما = ع لا + ف (ع)$$

$$= لا + ف (ع)$$

سے ساقط کرنا وہی بات ہے کہ ج کو مساواتوں

$$ما = ج لا + ف (ج)$$

$$= لا + ف (ج)$$

سے ساقط کیا جائے یعنی ج کی مختلف قیمتوں کے لئے خط

$$ما = ج لا + ف (ج) کا لفافہ معلوم کیا جائے۔$$

اس لئے مساوات مفروضہ کے حل دو طرح کے ہیں۔

(۱) خطی حل جسے ”مکمل ابتدائی“ کہتے ہیں اور جس میں ایک اختیاری
 مستقل شامل ہوتا ہے۔

(۲) لفافہ یا ”نادر حل“ جس میں کوئی اختیاری مستقل شامل
 نہیں ہوتا اور نیز یہ حل مکمل ابتدائی سے اختیاری مستقل کی جگہ
 کوئی خاص عددی قیمت مندرج کرنے سے حاصل نہیں ہو سکتا۔

ان حلوں کے درمیان ہندسی ربط یہ ہے کہ کامل ابتدائی
 خطوط کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے اور نادر حل ان کے
 لفافہ کو۔ نادر حلوں کی بحث اس کتاب کی حدود سے باہر
 ہے اور مزید معلومات کے لئے طالب علم بڑے رسالوں کا مطالعہ
 کرے۔

مثال - حل کرو $ما = ع لا + \frac{1}{ع}$

کلیدی قاعدہ کی رو سے کامل ابتدائی ہے

$$ما = م لا + \frac{1}{م}$$

لفاف یا نادر حل اوپر کی مساوات اور

$$= لا - \frac{1}{م}$$

کے درمیان م کو سا قط کرنے سے حاصل ہوگا۔

نادر حل ہے $ما^2 = م لا$

طالب علم فوراً پہچان لیگا کہ نادر حل $ما^2 = م لا$

مکانی کی مساوات ہے اور کامل ابتدائی $ما = م لا + \frac{1}{م}$

مکانی کے مما س کی مساوات ہے۔

امثلہ

ذیل کی ہر ایک صورت میں کامل ابتدائی اور لفافی حل معلوم کرو

$$۱- ما = ع لا + ع^2 \quad ۲- ما = ع لا + ع^3$$

$$۳- ما = ع لا + ع^4 \quad ۴- ما = ع لا + ع^5$$

$$۵- ما = (لا - ع) ع - ع^2 \quad ۶- (ما - ع لا) (ع - ع) = ع$$

$$۱۶- مساوات ما = لافہ (ع) + سا (ع) \dots (۱)$$

بھی پہلے بلماظ لا کے تفرق کرنے پھر ع کو متغیر متبوع خیال

کرنے سے حل ہو سکتی ہے۔

تفرق کرنے سے

$$ع = فہ (ع) + لا فہ (ع) \frac{ع}{ع} + سا (ع) \frac{ع}{ع}$$

$$\text{جس سے } \frac{ع}{ع} + لا \frac{فہ (ع)}{فہ (ع) - ع} = - \frac{سا (ع)}{فہ (ع) - ع}$$

جو ایک خطی مساوات ہے اور اس کا حل یہ ہے

$$لا \frac{فہ (ع) - ع}{ع} = - \frac{سا (ع)}{فہ (ع) - ع} \quad \text{یا} \quad \frac{فہ (ع) - ع}{ع} = \frac{سا (ع)}{فہ (ع) - ع} + ع$$

..... (۲)

اب اگر مساواتوں (۱) اور (۲) سے ع کو ساقط کیا جائے تو اصلی مساوات کا کامل ابتدائی حاصل ہوگا۔

$$\text{مثال۔ حل کرو} \quad ۶ = ۲ع + لا + ع \quad \dots \dots (۱)$$

$$\text{تفرق کرنے سے } ع = ۲ + ۲ع + لا \frac{ع}{ع} + ع \frac{ع}{ع}$$

$$\text{یا } ع = ۲ + لا + ۲ع$$

$$\text{یعنی } \frac{ع}{ع} - (ع + لا) = ۲ع$$

جس سے حاصل ہوتا ہے $ع + لا = ۲ع$ (۲)
 ان مساواتوں کا 'ع' حاصل استقاط اس طرح حاصل ہو سکتا ہے۔ پہلے ع کے لئے مساوات (۱) کو حل کر دیکھیں (۲) میں مندرج کرو۔ لیکن اگر نتیجہ کو منطق صورت میں پیش کرنا مطلوب ہو تو اس طرح عمل کرو

$$\text{مساوات (۲) سے } ۲ع + ع + لا = ۲ع$$

$$(۱) \text{ سے } ۲ع + ع + لا = ع + ۶$$

$$\text{اس لئے } ع + لا = ع + ۶ - ۲ع$$

$$\text{اس مساوات اور } ع + ۲ = ع + لا = ۶ \text{ سے چلیں ضرب کے}$$

ذریعہ

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}$$

جس سے حاصل اسقاط ہے $2(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})$
 ۱۔ ع کو ساقط کرنے کا جبریہ عمل کئی صورتوں میں مشکل یا ناممکن ہوتا ہے، ایسی صورتوں میں اسقاط کا عمل فی الحقیقت نہیں کیا جاتا لیکن مساواتوں (۱) اور (۲) کو ایسی ہمنژاد مساواتیں خیال کیا جاتا ہے جن کا ع، حاصل اسقاط مساوات زیر بحث کا حل مطلوب ہوتا ہے

مثلاً

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

$$\begin{aligned} 1 - 2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ 2 - 3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ 3 - 4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ 4 - 5 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ 5 - 6 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

۸۔ ایک منحنی کے نقطہ N پر کا ماس محور و ماس سے ت پر ملتا ہے اور وقت اس زاویہ میلان کے ماس کے متناسب ہے جو N کا ولا کے ساتھ ہے، منحنی کو معلوم کرو۔ [آکسفورڈ سسٹم]
 ۹۔ جو منحنی یہ خاصیت رکھتے ہیں کہ حوالہ کے محوروں پر ان کے ماسوں کے مقطوعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے ان کی تفرقی مساوات معلوم کرو۔

کامل ابتدائی معلوم کرنے سے ماس کی مساوات اور نادر حل منحنیات زیر بحث کی مساوات معلوم کرو۔

۱۰۔ وہ منحنی معلوم کرو جن کی صورت میں اس مثلث کا رقبہ جو حماس اور حوالہ کے محوروں کے درمیان بنتا ہے متقل ہو۔

۱۱۔ جن منحنیات میں حماس کے اس حصہ کا طول جو حوالہ کے محوروں کے درمیان کٹتا ہے متقل ہو ان کی تفرقی مساوات معلوم کرو، کامل ابتدائی اور نادر حل کو حاصل کرو اور ہر ایک کی ہندسی تعبیر تیار کرو۔

۱۲۔ ایک منحنی تفرقی مساوات $ما = ع' (لا - ع)$ کو یوں لکھا ہے نیز اگر $لا = \frac{1}{2} تو ع =$ ۔ ما منحنی کی مساوات معلوم کرو [آکسفورڈ ۱۸۸۶ء]

۱۳۔ مساوات ذیل کا کامل ابتدائی اور نادر حل معلوم کرو

$$قو^3 (ما - \frac{قو}{لا}) = ج \{ \frac{قو}{لا} + (\frac{قو}{لا})^2 \} \quad [آکسفورڈ ۱۸۹۰ء]$$

۱۴۔ ثابت کرو کہ اگر $لا^2 = س$ اور $ما^2 = ت$ تو مساوات ذیل

$$لا لا ما ما + (لا^2 - لا ما - ما^2) ب = لا ما =$$

کلیروی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے۔

اس طرح سے اس کا کامل ابتدائی اور نادر حل معلوم کرو۔ نتیجہ کی تعبیر بیان کرو۔



باب سوم

دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

ٹھیک یا حاضر تفرقی مساواتیں

۱۸۔ دوسرے رتبہ کی مساوات
اب ہم دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات پر بحث کریں گے
فہ (لا، ما، مام، مام) =

اس کے حل کرنے کا کوئی عام طریقہ نہیں ہے، مگر اس کی خاص صورتوں کا
حل کرنا چنداں مشکل نہیں۔

۱۹۔ صورت اول فرض کرو کہ یہ خطی مساوات ہے

اسکی نمونہ کی صورت ہوگی $\frac{م}{لا} + ف + \frac{ما}{مر لا} + ق = ما = د$

جہاں ف، ق، د متغیر لا کے تفاعل ہیں۔
اس مساوات کو حل کرنے کی تدبیر یہ ہے کہ پہلے ر کو حذف کر کے مساوات

$\frac{د}{مر لا} + ف + \frac{ما}{مر لا} + ق = ما =$

کا کوئی حل معلوم کیا جائے یا ویسے ہی بھانپ لیا جائے۔
فرض کرو کہ ما = فہ (لا) اس کا ایک حل ہے، اصلی مساوات میں رکھو
ما = می فہ (لا)

ما = می فہ (لا) + می فہ (لا)

$$م = م_1 ف_1 (لا) + م_2 ف_2 (لا) + م_3 ف_3 (لا)$$

ان قیمتوں کو مندرج کرنے سے

$$م_1 ف_1 (لا) + م_2 ف_2 (لا) + م_3 ف_3 (لا)$$

$$+ م_4 ف_4 (لا) + م_5 ف_5 (لا)$$

$$+ م_6 ف_6 (لا) = ل$$

لیکن $ف_1 (لا) + ف_2 (لا) + ف_3 (لا) + ف_4 (لا) + ف_5 (لا) + ف_6 (لا) = ۱$ ۔ حسب مفروض

$$اس لئے $م = م_1 \left\{ ف_1 (لا) + ف_2 (لا) + ف_3 (لا) + ف_4 (لا) + ف_5 (لا) + ف_6 (لا) \right\} = م_1$$$

جو $م$ کے لئے خطی مساوات ہے

شکل برآں ہے

$$م = م_1 \left\{ ف_1 (لا) + ف_2 (لا) + ف_3 (لا) + ف_4 (لا) + ف_5 (لا) + ف_6 (لا) \right\}$$

اور پہلا شکلی ہے

$$م_1 \left\{ ف_1 (لا) + ف_2 (لا) + ف_3 (لا) + ف_4 (لا) + ف_5 (لا) + ف_6 (لا) \right\} = ل$$

جس سے دوسرا شکلی اور اس لئے تفرقی مساوات کا حل حاصل ہو سکتا ہے

$$مثال۔ اس مساوات کو حل کرو $\frac{م_1}{۱۰} + \frac{م_2}{۲۰} + \frac{م_3}{۳۰} = ۱$ ۔ $لا = ۱۰$ ۔ $لا = ۲۰$ ۔ $لا = ۳۰$$$

$$یہاں $لا = ۱۰$ مساوات $\frac{م_1}{۱۰} + \frac{م_2}{۲۰} + \frac{م_3}{۳۰} = ۱$ کا ایک حل ہے$$

اس لئے رکھو $لا = ۱۰$

$$تب $م = لا + م_1 + م_2 + م_3$$$

اور

$$اس لئے $لا = ۱۰ + م_1 + م_2 + م_3$ ۔ $لا = ۲۰ + م_1 + م_2 + م_3$ ۔ $لا = ۳۰ + م_1 + م_2 + م_3$$$

$$y + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) x = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y$$

اور مکمل جزو ضربی ہے $\frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y$ یا $\frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y$

$$\text{پس } \frac{1}{3} x = \left(\frac{1}{3} - y\right) \Rightarrow \frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y$$

$$\text{اور } \frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y \Rightarrow \frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y \Rightarrow \frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y$$

$$\text{پس سے } \frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y \Rightarrow \frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y$$

$$\text{اور حل مطلوب ہے } \frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y \Rightarrow \frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y$$

۲۰۔ صورت دوم۔ ایک حرف غائب

(د) اگر مساوات میں لا موجود نہ ہو تو فرض کر دے کہ $\frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y$

$$\text{تب } \frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y \Rightarrow \frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y$$

اس طرح مساوات $\frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y$ ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y \Rightarrow \frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y$$

اور یہ پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔

(ب) اگر لا موجود نہ ہو تو فرض کر دے کہ $\frac{1}{3} x = \frac{1}{3} - y$

$$\text{تب } \frac{\text{مرع}}{\text{مرلا}} = \frac{\text{ما}}{\text{ملا}}$$

اور فہ (لا، ما، ملا) = ہو جاتی ہے

$$\text{فہ (لا، ع، مرع)} = \frac{\text{مرع}}{\text{مرلا}} =$$

اور یہ پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔

مثال ۱۔ مساوات ما، م + ما = ۲ ما کو حل کر دو۔

یہاں مساوات میں لا موجود نہیں ہے، پس رکھو ما = ع اور ما = ع $\frac{\text{مرع}}{\text{مرما}}$

$$\text{اس طرح } \text{ما} = \frac{\text{مرع}}{\text{مرما}} + \text{ع} = ۲ \text{ ما}$$

$$\text{یا } \frac{\text{مرع}}{\text{مرما}} + \frac{۲}{\text{ما}} \text{ع} = ۲ \text{ ما}$$

تکمل جزو ضربی ہے جو کہ $\frac{۲}{\text{مرما}} = ۲ \text{ ما}$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{مرع}}{\text{مرما}} (\text{ع} \text{ ما}) = ۲ \text{ ما}$$

$$\text{یا } \text{ع} \text{ ما} = \text{ما} + \text{مستقل} = \text{ما} + ۲ \text{ (فرض کر دو)}$$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{ما مرما}}{\text{ما} + ۲} = \text{مرلا}$$

$$\text{یا جنر } ۱ = \frac{۲}{۱} = ۲ + ۱$$

یعنی $۱ = ۲$ جنر $(۲ + ۱)$
مثال ۲۔ حل کرو $۱ + ۲ = ۳$ لا $۱ + ۲$ کو
 یہاں مساوات میں ما موجود نہیں ہے، پس رکھو $۱ = ۳$

$$\text{اس طرح } ۱ + ۳ = ۴ \text{ لا } \frac{۴}{۱}$$

$$\text{یا } \frac{۴}{۱} = \frac{۴}{۱}$$

$$\text{یعنی لوک } ۱ = \text{لوک } ۱ + ۳ + \text{مستقل}$$

$$۱ + ۳ = \frac{۴}{۱} \text{ (فرض کرو)}$$

$$\text{یا } ۱ + ۳ = \frac{۴}{۱}$$

جس سے حاصل ہوتا ہے $۱ + ۳ = \frac{۴}{۱}$ لا $۱ + ۳ = \frac{۴}{۱}$ جنر $۱ = \frac{۴}{۱} + ۱$
 جہاں ۱ اور ۱ اختیاری مستقل ہیں۔

اشکله

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو۔

$$۱ - ۲ = ۱ + ۲ = ۳$$

$$۱ - ۱ = ۱$$

$$۱ - ۳ = ۱ + ۳ = ۴$$

$$۱ - ۳ = ۱ + ۳ = ۴$$

$$۱ - ۴ = ۱ + ۴ = ۵$$

$$۱ - ۴ = ۱ + ۴ = ۵$$

$$+ \text{ف} \text{د} \text{ی} + \dots + \text{ف} \text{د} \text{ی} \text{ج} - \text{می}$$

$$+ \text{ف} \text{د} \text{ی} = \text{ق}$$

می۔ کاسر ن د + ف د ہے۔

اگر د کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ

$$\frac{\text{ف} \text{د} \text{ی}}{\text{ن}} = \frac{\text{ف} \text{د} \text{ی}}{\text{و}} \text{ یا } \text{و} = \frac{\text{ف} \text{د} \text{ی}}{\text{ن}}$$

تو جس رقم میں می واقع ہوتا ہے وہ خارج ہو جاتی ہے
اسی طرح اگر د کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ تفرقی مساوات

$$\frac{\text{ن} (\text{ن} - 1)}{2 \times 1} + \dots + \text{ف} \text{د} \text{ی} (\text{ن} - 1) + \text{ف} \text{د} \text{ی} = \text{و}$$

پوری ہو تو وہ رقم جس میں می واقع ہوتا ہے خارج ہو جاتی ہے۔
می کاسر ہے

$$\text{و} + \text{ف} \text{د} \text{ی} + \dots + \text{ف} \text{د} \text{ی} \text{ج} - \text{می}$$

اگر د کی ایک قیمت معلوم ہو سکے یا ویسے ہی بھانپ لی جا سکے
جو اوپر کے جملہ کو صفر بنا دے تو می = عا اور اس لئے می = عا
اور می = عا۔ رکھنے سے مساوات کا درجہ بقدر ایک کے

کم ہو سکتا ہے۔ طالب علم دیکھے کہ یہ جملہ شکل میں وہی ہے جو مساوات
معلومہ کے دائیں جانب کا رکن ہے۔

اس لئے اگر مساوات کا کوئی حل ما = و کسی طرح سے معلوم ہو سکے
جبکہ اس کا بائیں رکن حذف کیا جائے تو ما = و می رکھنے سے اور
پھر می = عا فرض کرنے سے ہم مساوات کا ایک رتبہ کم کر سکتے ہیں

۲۲- صورت آئینی

جیسا اوپر بیان ہوا درجہ دوم کی مساوات

$$۱۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۱۰ = ۴۰$$

میں $۱۰ = ۴۰$ کی درجہ اولیٰ مندرجہ کرنے سے اصلی مساوات

بعض اوقات سادہ صورت

$$۱۰ + ۱۰ = ۲۰$$

میں تحلیل ہو سکتی ہے۔

لیکن اس مساوات کا عام حل ابھی تک نہیں حاصل کیا گیا۔

”ٹھیک“ یا حاضر تفرقی مساوات

$$۲۳- اگر $۱۰ > ۴۰$ تو $۱۰ = ۴۰$ - کامل تفرقی ہے$$

اور مانخواہ کچھ ہی ہو یہ ممکن ہو سکتا ہے

کیونکہ اگر $۱۰ = ۴۰$ کو ۱۰ سے تعبیر کیا جائے تو

$$۱۰ = ۴۰ \text{ یا } ۱۰ = ۴۰ - ۱۰ = ۳۰ \text{ یا } ۱۰ = ۳۰$$

$$۱۰ = ۴۰ \text{ یا } ۱۰ = ۴۰ - ۱۰ = ۳۰ \text{ یا } ۱۰ = ۳۰ - ۱۰ = ۲۰$$

وغیرہ

$$۱۰ = ۴۰ \text{ یا } ۱۰ = ۴۰ - ۱۰ = ۳۰ \text{ یا } ۱۰ = ۳۰ - ۱۰ = ۲۰ \text{ یا } ۱۰ = ۲۰ - ۱۰ = ۱۰$$

$$\text{اس طرح } ۱۰ = ۴۰ \text{ یا } ۱۰ = ۴۰ - ۱۰ = ۳۰ \text{ یا } ۱۰ = ۳۰ - ۱۰ = ۲۰ \text{ یا } ۱۰ = ۲۰ - ۱۰ = ۱۰ \text{ یا } ۱۰ = ۱۰ - ۱۰ = ۰$$

..... (١) لك يا ق-ن-١

ظاہر ہے کہ جب $Q = N$ یا $N > Q$ تو تکمیل عمل میں نہیں آسکتا۔
۲۴۔ اوپر کے مسئلہ ابتدائی یا تہید یہ کی مدد سے ہم اکثر جلدی دیکھ
سکتے ہیں کہ مساوات معلومہ حاصر ماثوت ہے یا نہیں۔ کیونکہ اگر سب سے
پہلے تمام رقمیں اس شکل (۱) N کی جن میں $N > Q$ الگ کر لی جائیں
تو اکثر اوقات فقط دیکھنے ہی سے ہم فوراً بتا سکتے ہیں کہ باقی ماندہ ارتقام کامل
تفرقی سر نہاتی ہیں یا نہیں۔

مثال لا مله + لا مله + لا مله + لا مله + لا مله = جب لا

اس جگہ تمہید کی بنا پر لاۓ اور لاۓ کا مل تفرقی سرہیں اور ظاہر ہے کہ لاۓ + ما بھی لاۓ کا کامل تفرقی سرہے، اس کے اس مساوات کا پہلا تفرقی حسب ذیل ہے۔

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

۴۵۔ جانچ کا زیادہ عام طریقہ
حاضر تفرقی مساوات کو پرکھنے کا عام طریقہ حسب ذیل ہے جبکہ مساوات
عام صورت

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + f_n =$$

میں دی گئی ہو جہاں ف، ف، ف... کسی شکل کے لا کے
تفاعل ہیں۔

اگر تفریقوں کو زبروں سے تعبیر کیا جائے تو تکمیل بالخصوص سے

مفہد ماہرلا = مفہد ماہرلا

دایاں رکن کامل تفرقی سر ہوگا اگر

$$۱۲ لا^۲ - ۲۲ لا^۲ + ۱۲ لا^۲ = ۰$$

شرط پوری ہوتی ہے، پس دوسرا مکملی ہے

$$(۸ لا^۳ - ۴ لا^۲) + ۴ لا^۲ = ۰ \text{ جب } لا + لا + لا + ب$$

یا
جسے پھر جانچنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ دایاں رکن کامل تفرقی سر ہے، پس
تیسرا مکملی ہے

$$لا^۲ = ۰ \text{ جم } لا + \frac{لا^۲}{۲} + ب لا + ج$$

امثلہ

۱۔ ثابت کرو کہ لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱ = ۰ حاضر مساوات

ہے، اسے پورے طور پر حل کرو۔

۲۔ مساوات ذیل کو حل کرو

$$لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱ = ۰ \text{ جب } لا (لا^۳ - لا^۲ - لا + ۱) = ۰ \text{ جب } لا$$

۳۔ ذیل کی مساواتوں کے پہلے مکملی معلوم کرو۔

$$(ا) لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱ = ۰$$

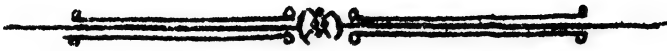
$$(ب) لا^۳ + لا^۲ - لا - ۱ = ۰$$

$$(ج) لا^۴ + لا^۳ + لا^۲ + لا + ۱ = ۰ \text{ کوک } لا$$

۴۔ اگر مساوات ف + ف + ف + ف + ف = ۰ کا ایک مکمل جزو ضربی

مہ ہو تو ثابت کرو کہ مہ ذیل کی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے

$$فپ مہ - \frac{مے}{مرا} (فپ مہ) + \frac{م۲}{مرا} (ف مہ) = ۰$$



باب چہارم

مستقل سروں الی خطی، تفرقی مساواتیں

۲۶۔ عام خطی تفرقی مساوات

ن، دین رتبہ کی عام خطی تفرقی مساوات کی شکل ہے

$$\frac{D_n}{n!} + \frac{D_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{D_{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{D_1}{1!} + \frac{D_0}{0!} = \dots \quad (1)$$

یہاں D_n ، D_{n-1} ، D_{n-2} ، D_1 اور D_0 کے معلوم تفاعل ہیں۔
فرض کرو کہ مساوات کا کوئی خاص حل $D_n = 0$ (دلا) ایسے ہی بجانب
لیا گیا ہے یا کسی طرح سے معلوم کر لیا گیا ہے۔

تب اگر $D_n = 0$ (دلا) D_{n-1} مساوات میں مندرج کیا جائے تو حاصل

$$\frac{D_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{D_{n-2}}{(n-2)!} + \frac{D_{n-3}}{(n-3)!} + \dots + \frac{D_1}{1!} + \frac{D_0}{0!} = \dots \quad (2)$$

فرض کرو کہ $D_{n-1} = 0$ ، $D_{n-2} = 0$ ، $D_1 = 0$ اس مساوات کے حل ہیں

تب ظاہر ہے کہ $D_n = 0$ ، $D_{n-1} = 0$ ، $D_{n-2} = 0$ ، $D_1 = 0$ ، $D_0 = 0$

بھی مساوات (۲) کا حل ہے اور اس میں D_n مستقل D_n ، D_{n-1} ، D_{n-2} ، D_1 ، D_0

شامل ہیں۔

اسلئے $D_n = 0$ ، $D_{n-1} = 0$ ، $D_{n-2} = 0$ ، $D_1 = 0$ ، $D_0 = 0$ (دلا)

مساوات کا ایک ایسا حل ہے جس میں D_n مستقل شامل ہیں اور اس لئے

یہ مساوات کا عام سے عام حل ہے، مساوات کا اس سے زیادہ عام حل نہیں معلوم کیا گیا۔

اس کا حصہ ف (لا) خاص تکمیلی (خ، ک) کہلاتا ہے اور

اس کے باقی ماندہ حصہ کو جس میں ف مستقل شامل ہیں متم تفاعل (م) کہتے ہیں، ظاہر ہے کہ متم تفاعل اس مساوات کا حل ہے جو اصلی مساوات میں بائیں رکن کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اگر یہ دونوں حل معلوم ہو جائیں تو مساوات کا پورا حل ان کا مجموعہ ہے۔

۲۷۔ دو مشہور صورتیں دو صورتیں ہیں جن کے حل بالعموم آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

(۱) جب مقداریں ف، ف، ف، ف سب مستقل ہوں

(۲) جب مساوات ف ذیل کی شکل اختیار کرے

$$لا \frac{م}{فر لا} + لا \frac{م}{فر لا} + لا \frac{م}{فر لا} + + لا \frac{م}{فر لا} = ص$$

جہاں لا، لا، لا، لا مستقل ہیں اور ص، لا کا کوئی تفاعل ہے۔

آگے چلکر معلوم ہو گا کہ دوسری صورت کا حل ایک ایسی مساوات کے حل پر موقوف ہو سکتا ہے جو پہلی قسم کے تحت میں آتی ہیں۔

مستقل سروں والی مساواتیں۔ متم تفاعل

۲۸۔ سب سے پہلے ہم اس طرح کی مساوات

$$لا + لا + لا + + لا + لا = ص \quad (۱)$$

کا حل معلوم کرتے ہیں جس میں تمام مستقل مقادیر ہیں اور باقیوں
رکن صفر ہے، یعنی فی الحال ہم صرف ”مشم تفاعل“ معلوم کرنے کی کوشش
کرتے ہیں۔

آز مائن کے طور پر فرض کرو کہ $\lambda = 1$ و $\rho = 1$ مساوات کا حل ہے،
اسے مندرجہ کرنے سے حاصل ہوگا

$$(r) \dots \dots \dots + \dots \dots \dots + \dots \dots \dots + \dots \dots \dots + \dots \dots \dots$$

فرض کرو کہ اس مساوات کی اصلیں

.....

ہیں جنہیں ہم فی الحال ایک دوسرے کے نامساوی فرض کرتے ہیں

تب لوملا، لوملا، لوملا، لوملا

تمام حل ہیں اور اس لئے

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \quad (3)$$

ایک ایسا حل ہے جس میں ان اختیاری مستقالات $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ شامل ہیں اور یہ عام سے عام حل ہے جو حاصل ہو سکتا ہے۔

۴۹- دو اصلین مساوی

اگر مساوات (۲) کی دو اصلیں مساوی ہوں مثلاً $m_1 = m_2$ تو اصل

(۳) کی پہلی دو رقمیں ہو جاتی ہیں $(1 + 1)$ فوراً لا،

اب چونکہ $1 + 1$ ایک ہی مستقل ہے، اس لئے اختیاری مستقلات کی تعداد میں ایک کی کمی ہو جاتی ہے اور اس لحاظ سے (۳) مساوات

مذکورہ کا عام سے عام حل نہیں رہتا۔
اب ہم اسے زیادہ غور سے دیکھتے ہیں

$$\text{فرض کرو کہ } m = m_1 + m_2$$

$$\text{تب } \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad (1)$$

$$= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \dots + \frac{1}{m_n}$$

$$= \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n} \right) \quad (2)$$

اب چونکہ $\frac{1}{m}$ اور $\frac{1}{m_1}$ دو بے تعلق اختیاری مقداریں ہیں، اس لئے انہیں ہم دو اور بے تعلق اختیاری مقداروں کی رقوم میں دو ربطوں کے ذریعہ جنہیں ہم اختیار کرنا چاہیں بیان کر سکتے ہیں۔

اولاً $\frac{1}{m}$ کو اتنا بڑا مانو کہ بالآخر حاصل ضرب $\frac{1}{m}$ جہاں m لانا تھا کم ہے $\frac{1}{m}$ کے مساوی ہو جو ایک اختیاری محدود مستقل ہے۔
ثانیاً $\frac{1}{m_1}$ کو $\frac{1}{m}$ سے مختلف علامت مانو اور اس کی قیمت اتنی بڑی منتخب کرو کہ $\frac{1}{m} + \frac{1}{m_1}$ ایک اختیاری محدود مستقل $\frac{1}{m}$ کے مساوی ہو۔
اب رقوم

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n}$$

m کے معدوم ہونے کی وجہ سے فنا ہو جائیں گی کیونکہ $\frac{1}{m}$ محدود ہے اور مربع خطوط واصلی کے اندر کا جملہ مستحق ہے اور اس میں m بطور جزو ضربی کے شریک ہوتا ہے۔

پس اگر $m = m_1$ تو رقوم $\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n}$ کی بجائے ہم

$\frac{1}{m} + \frac{1}{m_1} = \frac{1}{m_2} + \dots + \frac{1}{m_n}$ لکھ سکتے ہیں، اس لئے حل مذکور میں اختیاری

مستقلات کی تعداد ن ہی رہتی ہے۔ پس اس صورت میں یہ مساوات کا عام حل ہے۔

۳۔ تین اصلیں مساوی اب ہم اس صورت پر غور کرتے ہیں

جبکہ مساوات (۲) کی تین اصلیں مساوی ہوں یعنی $m = m = m$ حسب بالا رقوم $\frac{1}{2} \omega^2 \lambda + \frac{1}{2} \omega^2 \lambda + \frac{1}{2} \omega^2 \lambda$ کی بجائے ہم

(ب + ب) $\omega^2 \lambda + \frac{1}{2} \omega^2 \lambda$ رکھ سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ $m = m + k$

تب $\frac{1}{2} \omega^2 \lambda = \frac{1}{2} \omega^2 \lambda + k \lambda = \frac{1}{2} \omega^2 \lambda + (a + k \lambda) \left(\frac{1}{2} \omega^2 \lambda + \dots \right)$

پس $\frac{1}{2} \omega^2 \lambda + \frac{1}{2} \omega^2 \lambda + \frac{1}{2} \omega^2 \lambda$ کی بجائے ہم

(ب + ب) $\omega^2 \lambda + (b + \frac{1}{2} k) \omega^2 \lambda + \frac{1}{2} k \omega^2 \lambda$

$+ \frac{1}{2} k \omega^2 \lambda \left[\frac{1}{2} \omega^2 \lambda + \frac{1}{2} \omega^2 \lambda + \dots \right]$

رکھ سکتے ہیں اور $\frac{1}{2} \omega^2 \lambda$ ، b ، $\frac{1}{2} k$ کو اس طرح منتخب کر سکتے ہیں کہ

$$b + \frac{1}{2} k = \frac{1}{2} \omega^2 \lambda$$

$$b + \frac{1}{2} k = \frac{1}{2} \omega^2 \lambda$$

$$\frac{1}{2} k = \frac{1}{2} \omega^2 \lambda$$

جہاں ج، ج، ج کوئی اختیاری مستقل ہیں، خواہ ک کچھ ہی ہو

۳۳۔ خیالی اصلیں اگر دفعہ ۲۸ مساوات (۲) کی ایک اصل خیالی ہو تو یاد رہے کہ حقیقی سروں والی مساواتوں میں خیالی اصلوں کے ہمیشہ جوڑے واقع ہوتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ $م = ل + خ ب$ ، $م = ل - خ ب$ جہاں $خ = ل - ا$

تب $رقوم ل + قو لا + ل + قو لا$ یا $ل + قو لا + ل + قو لا$ (دو - خ ب) لا

حقیقی صورت میں اس طرح لائی جاسکتی ہیں:-

$ل + قو لا + قو لا$ (دو - خ ب) لا

$= ل + قو لا$ (جم ب لا + خ ب ب لا) + $ل + قو لا$ (جم ب لا - خ ب ب لا)

$= (ل + ل) + قو لا$ (جم ب لا + ل - ل) (خ ب ب لا) =

$= ب + قو لا$ (جم ب لا + ب) + $قو لا$ (جم ب لا)

جہاں $ل + ل$ اور $(ل - ل)$ (خ ب ب لا) کی بجائے

اختیاری مستقل ب اور ب رکھے گئے ہیں۔

فرض کرو کہ $ب = د$ (جم ع) + $ب = د$ (جم ع) تب

$د = ا ب + ب$ اور $ع = م س$ $\frac{ب}{ب}$

$ب$ (جم ب لا + ب) (جم ب لا) = $د$ (جم ب لا - ع)

پس اس طرح ہم

بِ وُلا جِم ب لا + بِ وُلا جِب ب لا کی بجائے

جِم وُلا جِم (ب لا + جِم)

رکھ سکتے ہیں جہاں جِم جِم اختیاری مستقل ہیں۔

۴۔ مکرر خیالی اصلیں

مکرر خیالی اصلوں کے لئے ہم پہلے کی طرح عمل کر سکتے ہیں کیونکہ یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اگر $م = م$ تو $م وُلا + م وُلا$ کی بجائے

(ب + ب لا) وُلا لکھا جاسکتا ہے اور $م وُلا + م وُلا$ کی بجائے
(بِم + بِم لا) وُلا

پھر اگر $م = م = م$ اور $م = م = م$ = و - خ ب تو ہم
 $م وُلا + م وُلا + م وُلا + م وُلا$

کی بجائے (ب + ب لا) وُلا وُلا خ ب لا + (بِم + بِم لا) وُلا - خ ب لا

یعنی وُلا [(بِم + بِم) جِم ب لا + (ب - بِم) خ جِب ب لا]

+ لا وُلا [(بِم + بِم) جِم ب لا + (ب - بِم) خ جِب ب لا]

اور اسلئے وُلا (ج جِم ب لا + ج جِب ب لا) + لا وُلا (ج جِم ب لا + ج جِب ب لا)

یعنی $\text{و}^{\text{لا}} (\text{ج} + \text{لا ج})$ جم ب لا + $\text{و}^{\text{لا}} (\text{ج} + \text{لا ج})$ جب ب لا

یا دوسری صورت میں $\text{م}^{\text{لا}} (\text{ب لا} + \text{م}) + \text{م}^{\text{لا}} (\text{ب لا} + \text{م})$ یا دوسری صورت میں $\text{م}^{\text{لا}} (\text{ب لا} + \text{م})$ لکھ سکتے ہیں۔

آخری تین صورتوں میں سے ہر ایک میں چار اختیاری مستقل شامل ہوتے ہیں جو ابتدا کے اختیاری مستقلات $\text{ا}^{\text{لا}}$ ، $\text{ب}^{\text{لا}}$ ، $\text{ج}^{\text{لا}}$ ، $\text{د}^{\text{لا}}$ کی بجائے ہیں پس اس صورت میں بھی اختیاری مستقلات کی تعداد (۴) ہی رہتی ہے جو اس حل کو عام سے عام بنانے کے لئے ضروری ہے۔
ظاہر ہے کہ اس قاعدہ کی توسیع اس صورت میں بھی ہو سکتی ہے جبکہ خیالی اصولوں کی کوئی سی تعداد مساوی ہو۔

$$۳۵ - \text{مساوات} \quad \frac{\text{م}^{\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}}} - ۳ \frac{\text{م}^{\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}}} + ۲ = ۰ \text{ کو حل کرو}$$

اس جگہ آزمائشی حل $\text{م}^{\text{لا}} = \text{ا}^{\text{لا}}$ ہے، اس کو مندرجہ کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{م}^{\text{لا}} - ۳ \text{م}^{\text{لا}} + ۲ = ۰$$

جسکی اصلیں ۱ اور ۲ ہیں۔

پس $\text{م}^{\text{لا}} = \text{ا}^{\text{لا}}$ اور $\text{م}^{\text{لا}} = \text{ب}^{\text{لا}}$ دونوں خاص حل ہیں اور

$$\text{م}^{\text{لا}} = \text{ا}^{\text{لا}} + \text{ب}^{\text{لا}}$$

عام حل ہے جس میں دو اختیاری مستقل ہیں۔

$$\text{مثال ۲ - حل کرو} \quad \frac{\text{م}^{\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}}} - \text{ا}^{\text{لا}} = ۰ \text{ کو}$$

یہاں امدادی مساوات $\text{م}^{\text{لا}} - \text{ا}^{\text{لا}} = ۰$ ہے اور اس کی اصلیں $\text{م}^{\text{لا}} = \text{ا}^{\text{لا}}$

اور عام حل ہے $ما = ا + و + ق - لا$

اور اگر ضرورت ہو تو اسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$ما = ب + جمر لا + ب + جمر لا$

جہاں $ا$ کی بجائے $ب + جمر لا$ اور $و$ کی بجائے $ب - جمر لا$ لکھا گیا ہے

مثال ۳ - $\frac{فر ما}{فر لا} + و ما =$ کو حل کرو

یہاں ابتدائی مساوات $م + ا = و$ کی اصلیں $م = \pm$ و $خ$ ہیں

اور عام حل ہے $ما = ا + جمر لا + ا + جب لا$

یا دوسری صورت میں $ما = ب + جمر لا + ب$

مثال ۴ - $\frac{فر ما}{فر لا} - \frac{فر ما}{فر لا} + ۵ = ۲ - ما$

یا (عف - ۱) (عف - ۲) = جہاں $\frac{فر ما}{فر لا}$ کی بجائے عف

لکھا گیا ہے۔

ابتدائی مساوات ہے $۳ - م + م + ۵ = ۲ -$

یا $(م - ۱)(م - ۲) =$ یعنی اصلیں ۱، ۲ ہیں

پس عام حل ہے $ما = (ا + و لا) + و + ق - لا$

مثال ۵ - $(عف + ۱)(عف - ۱) = ما$

ابتدائی مساوات ہے $(م + ۱)(م - ۱) =$

جس کی اصلیں \pm ۱ ہیں، اس لئے عام حل ہے

$ما = ا + جمر لا + ا + جب لا + و$

یا ما = ب جم (لا + بی) + ل^۲ قو^۲

مثال ۶ - حل کرد (عفا + عف + ا) (عف - ۲) ما = کو

امدادی مساوات ہے (م + م + ا) (م - ۲) =

اور اس کی اصلیں ہیں - $\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} \sqrt{2}$ اور ۲ اس لئے عام حل ہے

ما = ل^۲ قو^۲ جم لا^۲ ل^۲ قو^۲ جب لا^۲ ل^۲ قو^۲ + ل^۲ قو^۲

یا ما = ب قو^۲ جم (لا^۲ ل^۲ قو^۲ + بی) + ل^۲ قو^۲

مثال ۷ - (عفا + عف + ا) (عف - ۲) (عف - ۵) ما = کو حل کرد
صریحاً اس کا عام حل ہے

ما = (ل^۲ + ل^۲ لا) قو^۲ جم لا^۲ ل^۲ قو^۲ + (ل^۲ + ل^۲ لا) قو^۲ جب لا^۲ ل^۲ قو^۲

(ل^۲ + ل^۲ لا + ل^۲ لا) قو^۲ + ل^۲ قو^۲

جس میں آٹھ اختیاری مستقل شامل ہیں -

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرد

$$۱ - \frac{قو^۲}{قولا} - (ل + ب) \frac{قو^۲}{قولا} + ل ب ما =$$

$$۲ - \frac{قو^۲}{قولا} - ۶ ل \frac{قو^۲}{قولا} + ۱۱ ل^۲ \frac{قو^۲}{قولا} - ۶ ل^۳ ما =$$

$$۳ - \frac{قو^۲}{قولا} - ۹ ل^۲ \frac{قو^۲}{قولا} + ۲۳ ل^۳ \frac{قو^۲}{قولا} - ۱۵ ل^۴ ما =$$

$$۲ - \frac{فر۳}{فر۳} - ۳ = \frac{فر۳}{فر۳} + ۲ = ۵ - ۵ = \frac{فر۳}{فر۳} = ۱$$

$$۶ - \frac{فر۴}{فر۴} = ۴ - (عف - ۱) (عف - ۲) = ۴$$

$$۸ - (عف + ۱) (عف + ۲) (عف + ۳) = ۹ - (عف + ۱) (عف - ۱) = ۴$$

$$۱۰ - (عف + ۱) (عف + ۲) (عف + ۳) = ۴$$

$$۱۱ - (عف - ۱) (عف - ۲) (عف + ۲) (عف + ۳) = ۴$$

$$۱۲ - (عف + ۱) (عف + ۲) (عف + ۳) (عف + ۴) = ۴$$

خاص تکملی

۳۶ - اوپر ہم نے مساوات ف (عف) = ۴ کے ستم تفاعل پر غور کیا ہے جہاں

$$ف (عف) = عف + ۱ عف + ۲ عف + ۳ عف + ۴ عف + \dots + ۱$$

اور ۱، ۲، ۳، ۴،، ۱ مستقل ہیں و لا کا کوئی تفاعل ہے، اب ہم اس مساوات کے خاص تکملی کو حاصل کرنے کے چند کارآمد طریقوں پر غور کرتے ہیں -

$$ہم اوپر کی مساوات کو اس طرح لکھتے ہیں = ۴ = \frac{۱}{ف (عف)} و$$

$$یا [ف (عف)]^{-۱} و جہاں \frac{۱}{ف (عف)} ایک ایسا عامل ہے کہ$$

$$ف (عف) [ف (عف)]^{-۱} = ۱ و$$

۳۷۔ ”عف“ جبر و مقابلہ کے اساسی اصولوں کو پورا کرتا ہے
تفرقی احصا میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ عامل عف

(یعنی $\frac{م}{لا}$) قوانین ذیل کو پورا کرتا ہے

(۱) جبر و مقابلہ کا تقیسی قانون یعنی

$$\text{عف} (می + و + ه + ...) = \text{عف} می + \text{عف} و + \text{عف} ه + \dots$$

(۲) قانون مبادلہ صرف بلحاظ مستقلوں کے یعنی

$$\text{عف} (ج می) = (ج) \text{عف} می$$

(۳) قانون قوت نما یعنی

$$\text{عف}^n \text{عف} می = \text{عف}^{n+1} می$$

جہاں n مثبت صحیح ہیں۔

پس رمز یا علامت عف جبر یہ مقادیر کی باہمی ترکیب کے تمام
ابتدائی قوانین کو پورا کرتی ہے نہ صرف متغیر مقداروں کے ساتھ اس
کا تبادلہ نہیں ہو سکتا۔

پس معلوم ہوا کہ کسی منطق جبر یہ تناظر کے جواب میں عاملوں
کا بھی ایک متناظر تناظر ہو گا مثلاً مسئلہ ثنائی کی رو سے

$$(م + لا) = م^0 + م^1 لا + م^2 لا^2 + \dots + \frac{م^n (1 - لا)}{1 - لا} + لا^n$$

اور ایسے ہی بغیر فرید ثبوت کے عاملوں کے لئے متناظر مسئلہ کی رو سے

$$(\text{عف} + لا) = \text{عف}^0 + \text{عف}^1 لا + \text{عف}^2 لا^2 + \dots + \frac{\text{عف}^n (1 - لا)}{1 - لا} + لا^n$$

$$= \text{عف}^0 م + \text{عف}^1 م لا + \text{عف}^2 م لا^2 + \dots + \frac{\text{عف}^n م (1 - لا)}{1 - لا} + لا^n$$

۳۸۔ $\text{عل ف (عف) } \dot{\text{و}} \dot{\text{لا}}$
 تفرقی احصا میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اگر مثبت صحیح ہو تو
 $\text{عف } \dot{\text{و}} \dot{\text{لا}} = \dot{\text{ر}} \dot{\text{و}} \dot{\text{لا}}$

فرض کرو کہ $\text{عل عف } \dot{\text{ر}}$ ایسا ہے کہ
 $\text{عفا عف } \dot{\text{ر}} \dot{\text{می}} = \dot{\text{ی}}$
 اس تعریف کے مطابق عفا عمل تکمیل کو تعبیر کرتا ہے، ہم فرض کرتے ہیں کہ $\text{عل عف } \dot{\text{ر}}$ ہی میں کسی اختیاری مستقل کا اضافہ نہیں ہوتا (کیونکہ یہاں ہمیں صرف ایک خاص تکمیلی کی تلاش ہے نہ کہ عام سے عام تکمیلی کی)

اب چونکہ $\text{عفا } \dot{\text{ر}} \dot{\text{و}} \dot{\text{لا}} = \dot{\text{و}} \dot{\text{لا}} = \text{عفا عف } \dot{\text{ر}} \dot{\text{و}} \dot{\text{لا}}$

اس سے ظاہر ہے کہ $\text{عفا } \dot{\text{ر}} \dot{\text{و}} \dot{\text{لا}} = \dot{\text{ر}} \dot{\text{و}} \dot{\text{لا}}$
 اس لئے ظاہر ہے کہ ن کی تمام مثبت، منفی صحیح قیمتوں کے لئے
 $\text{عفا } \dot{\text{و}} \dot{\text{لا}} = \dot{\text{ر}} \dot{\text{و}} \dot{\text{لا}}$

۳۹۔ فرض کرو کہ $\text{ف (می) کوئی جملہ می کا ہے جو ی کی مثبت یا منفی صحیح قوتوں میں (} = \text{ح } \dot{\text{ر}} \dot{\text{می}} \dot{\text{ر}} \dot{\text{جہاں }} \dot{\text{ر}} \dot{\text{ایک مستقل ہے اور می بد منحصر نہیں ہے (بھیل سکتا ہے}}$

تب $\text{ف (عف) } \dot{\text{و}} \dot{\text{لا}} = (\text{ح } \dot{\text{ر}} \dot{\text{عفا}}) \dot{\text{و}} \dot{\text{لا}}$

$= (\text{ح } \dot{\text{ر}} \dot{\text{عفا}} \dot{\text{و}} \dot{\text{لا}})$

$= (\text{ح } \dot{\text{ر}} \dot{\text{ر}}) \dot{\text{و}} \dot{\text{لا}}$

= ف (۱) فولا
 عمل ف (عف) فولا کا جو حاصل ہے وہ عف کی بجائے ف رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ $\frac{1}{\text{عف}^2 + 2\text{عف} + 1}$ فولا کی قیمت معلوم کرو۔

اس قاعدہ کی رو سے قیمت مطلوبہ ہے

$$\frac{1}{1+2+2+2} \text{ فولا } = \frac{1}{5}$$

مثال ۲۔ $\frac{\text{عف} + 1}{(\text{عف} + 2)(\text{عف} + 3)(\text{عف} + 4)}$ فولا کی قیمت معلوم کرو

اس قاعدہ کی رو سے قیمت مطلوبہ ہے $\frac{2}{1 \times 2 \times 5} \text{ فولا } = \frac{2}{10}$

امثلہ

۱۔ ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$$(۱) \frac{1}{\text{عف} + 1} \text{ فولا } \quad (۲) \frac{1}{(\text{عف} + 1)(\text{عف} + 2)} \text{ فولا}$$

$$(۳) \frac{1}{(\text{عف} + 2)(\text{عف} + 3)(\text{عف} + 4)} \text{ جملہ لا}$$

۲۔ ثابت کرو کہ $\frac{\text{عف}^2}{(\text{عف} - 1)(\text{عف} - 2)(\text{عف} - 3)} = \frac{1}{(1 - \text{عف})} + \frac{1}{(2 - \text{عف})} + \frac{1}{(3 - \text{عف})}$

۳۔ ذیل کے نتائج ثابت کرنے میں دفعہ ۳۹ کو استعمال کرو

ف (عف) جب م لا = ف (م) جب م لا

ن (عفا) جب م لا = ف (م) جب م لا

ف (عف) جہنم لا = ف (م) جہنم لا

۴۰۔ عمل ف (عف) و لا

فرض کرو کہ ما = و لا ما جہان ما لا کا تفاعل ہے۔

تب چونکہ عف و لا = و لا

اس لئے یب نیز کے مسئلہ کی رو سے

ما = و لا (و ما + ج و عف ما + ج و عف ما + ج و عف ما + ج و عف ما)

جسے مسئلہ ثنائی کی طرح لکھنے سے حاصل ہوتا ہے [دفعہ ۳۰]

عف و لا ما = و لا (عف + و) ما

جہاں ن مثبت صحیح ہے۔

اب فرض کرو کہ (عف + و) ما = لا

جسے ہم لکھ سکتے ہیں ما = (عف + و) لا

تب چونکہ عف و لا ما = و لا (عف + و) ما

یا عف و لا (عف + و) لا = و لا لا

اس لئے عف و لا لا = و لا (عف + و) لا

اس لئے تمام صورتوں میں ن کی مثبت، منفی صحیح قیمتوں کے لئے

عف و لا لا = و لا (عف + و) لا

$$\text{عفا}^1 \text{ جب } م \text{ لا} = (-م^2) \text{ جب } م \text{ لا}$$

اور اس لئے عفا^۲ جب م لا = (-م^۲) جب م لا
اس لئے حسب سابق (دفعات ۳۹، ۴۱) معلوم ہوگا کہ

$$ف (\text{عفا}^2) \text{ جب } م \text{ لا} = (-م^2) \text{ جب } م \text{ لا}$$

مثال ۴۱: $\frac{ف}{ف+ب} \text{ جب } ب \text{ لا} = \frac{عفا^1}{عفا^1+ب} \text{ جب } ب \text{ لا} = \frac{ف}{ف+ب} \text{ جب } ب \text{ لا}$ [دفعہ ۴۱]

$$= \frac{ف}{ف+ب} \text{ جب } ب \text{ لا} = \frac{عفا^1}{عفا^1+ب} \text{ جب } ب \text{ لا}$$

$$= \frac{ف}{ف+ب} \text{ جب } ب \text{ لا} = \frac{عفا^1}{عفا^1+ب} \text{ جب } ب \text{ لا}$$

$$= \frac{ف}{ف+ب} \text{ جب } ب \text{ لا} = \frac{عفا^1}{عفا^1+ب} \text{ جب } ب \text{ لا}$$

یس (۱)

امثلہ

۱۔ اس طریقہ سے جملات ذیل کے تکلی معلوم کرو

$\frac{ف}{ف+ب} \text{ جب } ب \text{ لا}$ ، $\frac{عفا^1}{عفا^1+ب} \text{ جب } ب \text{ لا}$ ، $\frac{ف}{ف+ب} \text{ جب } ب \text{ لا}$

۲۔ ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$$\frac{عفا^1}{عفا^1+ب} \text{ جب } ب \text{ لا} = \frac{ف}{ف+ب} \text{ جب } ب \text{ لا}$$

۳۔ جیب اور جیب التمام کی قوت غائی قیمتوں کے ذریعہ اعمال
ف (عفا) جب م لا، ف (عفا) جب م لا کے نتائج حاصل کرو۔

$$۴۳ - \text{عمل } \frac{۱}{\text{ف (دعفا)}} \text{ جب م لا}$$

اب ہم عمل $\frac{۱}{\text{ف (دعفا)}}$ جب م لا پر غور کریں گے جہاں ف (دی) ایک ایسا تفاعل سی کا ہے کہ اسے ہم می کی مثبت صحیح قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں۔

فرض کر دو کہ ف (دعفا) کو عفا کی قوتوں میں پھیلا یا گیا ہے اب اگر پھیلاؤ میں طاق قوتیں شریک نہ ہوں تو دفعہ ماقبل کے قاعدہ کی رو سے اوپر کے عمل کا نتیجہ فوراً حاصل ہو سکتا ہے۔

مثلاً $\frac{۱}{\text{عفا}^۲ + \text{عفا}^۲ + \text{عفا}^۲} = \text{جب م لا} = \frac{۱}{۶۳ - ۱۶ + ۳ - ۱} = \frac{۱}{۵۱} = \text{جب م لا}$
لیکن اگر ہر دو طاق اور جفت قوتیں شریک ہوں تو اس طرح عمل ہو سکتا ہے، جفت قوتوں کو الگ اور طاق قوتوں کو الگ اکٹھا کرو اور عمل مذکور کو اس طرح لکھو

$$\text{ف (دعفا)} \text{ جب م لا} = \frac{۱}{\text{فہ (دعفا)}^۲ + \text{عفا فا (دعفا)}^۲} \text{ جب م لا}$$

$$= \frac{\text{فہ (دعفا)}^۲ - \text{عفا فا (دعفا)}^۲}{[\text{فہ (دعفا)}^۲ - \text{عفا فا (دعفا)}^۲]} \text{ جب م لا}$$

$$= \frac{\text{فہ (دعفا)}^۲ - \text{عفا فا (دعفا)}^۲}{[\text{فہ (دعفا)}^۲ - \text{عفا فا (دعفا)}^۲]} \text{ جب م لا}$$

$$= \frac{\text{فہ (دعفا)}^۲ - \text{عفا فا (دعفا)}^۲}{[\text{فہ (دعفا)}^۲ - \text{عفا فا (دعفا)}^۲]} \text{ جب م لا}$$

بغور دیکھتے سے معلوم ہوگا کہ عملی طور پر عفا کی بجائے - مم فوراً اس منزل

$$\frac{1}{\text{فہ}(\text{عفا}) + \text{عفا}(\text{فہ})}$$

جب م لا کے بعد لکھ سکتے ہیں یعنی اوپر کے جملہ کی بجائے

$$\frac{1}{\text{فہ}(-\text{م}) + \text{عفا}(\text{فہ}-\text{م})}$$

جب م لا

یا

$$\frac{\text{فہ}(-\text{م}) - \text{عفا}(\text{فہ}-\text{م})}{[\text{فہ}(-\text{م})] - \text{عفا}^2[\text{فہ}-\text{م}]}$$

جب م لا وغیرہ فوراً لکھ سکتے ہیں -

مثال ۱ -

$$\frac{1}{\text{عفا}^3 + \text{عفا}^2 + \text{عفا} + 1}$$

جب ۲ لا کی قیمت معلوم کرو -

$$\frac{1}{\text{عفا}^3 + 1 + \text{عفا} + \text{عفا}^2}$$

جب ۲ لا

$$\frac{1}{3 - (\text{عفا} + 1)}$$

جب ۲ لا

$$\frac{\text{عفا} - 1}{3 - (\text{عفا} - 1)}$$

جب ۲ لا

$$\frac{1}{15} \frac{\text{عفا} - 1}{1}$$

جب ۲ لا

$$\frac{1}{15} \frac{2}{1} \text{جم} ۲ لا - \frac{1}{15}$$

جب ۲ لا

مثال ۲ -

$$\frac{1}{3 - (\text{عفا} - 1)}$$

فولاجم لا کی قیمت حاصل کرو

$$\text{یہ جملہ} = \frac{1}{\text{عف} + 1} \cdot \text{جم لا}$$

$$= \frac{1}{\text{عف} + 3 + \text{عف} + 2 + \text{عف} + 1} \cdot \text{جم لا}$$

$$= \frac{1}{\text{عف} - 3 + \text{عف} + 3 + 1} \cdot \text{جم لا} \quad [\text{عف کی بجائے} - 1 \text{ لکھنے سے}]$$

$$= \frac{1}{\text{عف} - 1} \cdot \text{جم لا}$$

$$= \frac{1 + \text{عف}}{\text{عف} - 1} \cdot \text{جم لا}$$

$$= \frac{1}{2} (\text{عف} + 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{جم لا} - \frac{1}{4} (\text{جم لا} - \text{جب لا})$$

مثلاً

۱۔ جملات ذیل پر مندرجہ ذیل عمل کرو۔

$$\frac{\text{عف}}{\text{عف} - 1} \cdot \text{جب لا} \quad \frac{\text{عف}^3}{(\text{عف} - 1)(\text{عف} - 2)} \cdot \text{لا جب لا}$$

$$\frac{1}{\text{عف} - 1} \cdot \text{لا جب لا} + \frac{1}{\text{عف} + 1} \cdot \text{لا جب لا}$$

۲۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{\text{عف} + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\text{عف} + 1} + \frac{1}{\text{عف} - 1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\text{عف} - 1} - \frac{1}{\text{عف} + 1} \right)$

جہاں ن نمکلی علامتیں ہیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{\text{ف} (د)}$ کو جزوی کسروں میں تحلیل کرنے سے

عمل $\frac{1}{\text{عف}}$ و معمولی تکملوں کے حاصل جمع کی صورت میں بیان ہو سکتا ہے۔

۴۴۔ عامل $\frac{1}{\text{عف}}$ و جہاں و مقدار جبریہ ہے۔

اگر عمل $\frac{1}{\text{عف}}$ و میں و متغیر لا کا ایک جبریہ،

منطق، صحیح تفاعل ہو تو ہم $\frac{1}{\text{عف}}$ کو کسی نہ کسی طریقہ سے عف کی صعودی قوتوں میں اُس حد تک پھیلا سکتے ہیں کہ عف کا قوت نما و میں لا کی بڑی سے بڑی قوت کے مساوی ہو۔

مثال ۱۔ مثلاً مطوم کرو $\frac{1}{\text{عف} + \text{عف} + \text{عف}}$ (لا + لا + لا)

$$\text{یہ جملہ} = \frac{1 - \text{عف}}{1 - \text{عف}} (لا + لا + لا)$$

$$= (1 - \text{عف} + \text{عف} - \text{عف} + \text{عف} - \text{عف} + \dots) (لا + لا + لا)$$

$$= (لا + لا + لا) - (لا + لا + لا) = لا - لا - لا$$

مثال ۲۔ نیز $\frac{1}{\text{عف}^3 + \text{عف}^2 + \text{عف} + 1}$ و لا کی قیمت دریافت کرو

$$\text{جملہ} = لا \frac{1}{(1 + \text{عف}) + (1 + \text{عف})^2 + (1 + \text{عف})^3 + 1 - 1}$$

$$= لا \frac{1}{1 + \text{عف} + \text{عف}^2 + \text{عف}^3 + 1 + \text{عف} + \text{عف}^2 + \text{عف}^3 + 1 + \text{عف} + \text{عف}^2 + \text{عف}^3 + 1 - 1}$$

$$= لا \frac{1}{1 + \frac{1}{\text{عف}} + \frac{1}{\text{عف}^2} + \frac{1}{\text{عف}^3} + 1 + \frac{1}{\text{عف}} + \frac{1}{\text{عف}^2} + \frac{1}{\text{عف}^3} + 1 + \frac{1}{\text{عف}} + \frac{1}{\text{عف}^2} + \frac{1}{\text{عف}^3} + 1 - 1}$$

$$\frac{۱}{۱۰} = (۱ - \frac{۸}{۵} + \frac{۲۹}{۲۵} - \frac{۵۶۹}{۲۵۰} + \dots) \frac{۱}{۱۰}$$

$$\frac{۱}{۱۰} = (\frac{۱}{۱۰} - \frac{۸}{۵} + \frac{۲۹}{۲۵} - \frac{۵۶۹}{۲۵۰} + \dots) \frac{۱}{۱۰}$$

مثلاً

ذیل کے عمل کرو۔

$$۱ - \frac{۱}{(۱+۲)(۲+۳)} = \frac{۱}{(۱+۲)(۲+۳)} - \frac{۱}{(۱+۲)(۲+۳)} + \frac{۱}{(۱+۲)(۲+۳)} - \dots$$

$$۲ - \frac{۱}{(۱+۲)(۲+۳)} = \frac{۱}{(۱+۲)(۲+۳)} - \frac{۱}{(۱+۲)(۲+۳)} + \frac{۱}{(۱+۲)(۲+۳)} - \dots$$

$$۳ - \frac{۱}{(۱+۲)(۲+۳)} = \frac{۱}{(۱+۲)(۲+۳)} - \frac{۱}{(۱+۲)(۲+۳)} + \frac{۱}{(۱+۲)(۲+۳)} - \dots$$

۴۵۔ ایسی صورتیں جن میں یہ طریقہ ناکام رہتے ہیں۔
خاص تکملی حاصل کرنے کے جو طریقے اوپر درج کئے گئے ہیں انہیں استعمال کرنے میں اکثر اوقات کئی صورتیں ایسی پیدا ہوتی ہیں جہاں یہ طریقہ کامیاب نہیں ہو سکتے، اب ہم یہ بتانے کی کوشش کرتے ہیں کہ ایسی حالتوں میں طرز عمل کیا ہونا چاہئے۔

$$۴۶۔ مساوات $\frac{۱}{۱-۲}$ - $\frac{۱}{۱-۲}$ کو حل کرو$$

متم تفاعل ۱ کو ہے۔

خاص تکملی حاصل کرنے کے لئے $\frac{۱}{۱-۲}$ کی قیمت معلوم ہونی

چاہئے۔ اگر ہم دفعہ ۳۹ کا قاعدہ استعمال کریں تو حاصل ہوگا

$$\frac{۱}{۱-۲} = \infty$$

اس مشکل سے بچنے کے لئے ہم دفعہ ۴۱ کا قاعدہ استعمال کرتے ہیں جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{عف} - 1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} = \frac{1}{\text{عف}} = 1 = \frac{1}{\text{لا}} \cdot \frac{1}{\text{فو}}$$

جو مطلوبہ خاص تکمیلی ہے۔

ایک اور طریقہ استعمال کرنے کی بجائے ہم عمل $\frac{1}{\text{عف} - 1} \cdot \frac{1}{\text{فو}}$ کا بغور معائنہ کرتے ہیں۔

لا کی بجائے لا (۱ + ہ) کہنے سے

$$\frac{1}{\text{عف} - 1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} = \frac{1}{\text{ہ}} = \frac{1}{\text{عف} - 1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} \cdot \frac{1}{\text{ہ}} = \frac{1}{\text{عف} - 1} \cdot \frac{1}{\text{فو}} \cdot \frac{1}{\text{ہ}}$$

$$= \frac{1}{\text{ہ}} \cdot \frac{1}{\text{فو}} \cdot (1 + \text{ہ} + \text{ہ}^2 + \frac{\text{ہ}^3}{2} + \frac{\text{ہ}^4}{24} + \dots)$$

$$= \frac{1}{\text{ہ}} \cdot \left[\frac{1}{\text{فو}} + \frac{1}{\text{فو}} \cdot \text{ہ} + \frac{1}{\text{فو}} \cdot \frac{\text{ہ}^2}{2} + \frac{1}{\text{فو}} \cdot \frac{\text{ہ}^3}{24} + \dots \right]$$

اس جملہ میں سے حصہ ہا $\frac{1}{\text{فو}}$ لا متناہی ہو جاتا ہے لیکن اسے

ہم متمم تفاعل $\frac{1}{\text{فو}}$ کے ساتھ لے سکتے ہیں اور چونکہ $\frac{1}{\text{فو}}$ کی قیمت اختیاری ہے، اس لئے ہم $\frac{1}{\text{فو}}$ کو ایک نیا اختیاری مستقل ب تصور کرتے ہیں کیونکہ $\frac{1}{\text{فو}}$ کا ایک حصہ منفی اور غیر متناہی فرض کیا جاسکتا ہے جو رقم $\frac{1}{\text{فو}}$ کا توازن کر دے گا۔

پس لا $\frac{1}{\text{فو}}$ مطلوبہ خاص تکمیلی ہے۔

باقی رقموں میں ہا شریک ہوتا ہے جو ہ کے لا انتہا کم ہونے سے معدوم ہو جاتی ہیں۔

پس مساوات کا پورا حل $\frac{1}{\text{فو}} + \frac{1}{\text{فو}} = \frac{1}{\text{فو}}$ ہے۔

مثال ۲۔ مساوات $\frac{x^2}{x-2} + m = x + 2$ جب x لا کو مل کر دیا

مستم تفاعل صریحاً یہ ہے $m = x + 2$ جب x لا + ب جم x لا

خاص تنکلی کے دو حصے ہیں $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$ تو یا $\frac{1}{x-2}$ اور $\frac{1}{x+2}$ جب x لا دوسرے حصے میں اگر دفعہ m کا قاعدہ استعمال کیا جائے تو حاصل ہوگا جب x لا یعنی ∞ پس یہ قاعدہ ناکام رہے گا۔

اب ہم $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}$ جب x لا $(x+1)$ کی انتہا معلوم کرتے ہیں جبکہ $m = 0$

یہ جملہ $= \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$ جب x لا $(x+2)$ لا

$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-2}$ (جب x لا جم x لا + جم x لا جب x لا)

$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-2}$ [جب x لا $(x-1)$ + $\frac{1}{x-2}$ + \dots] + جم x لا $(x-2)$ لا \dots

$= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2}$ جب x لا + جم x لا + جم x لا کی قوتیں

$=$ (ایک ایسی رقم جو مستم تفاعل میں شریک کر دی جاسکتی

ہے) $-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \dots$ (رقمیں جو x کے ساتھ معدوم ہو جاتی ہیں)

پس تفرقی مساوات کا پورا حل ہے

$m = x + 2$ جب x لا + ب جم x لا + $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$ لا جم x لا

یعنی $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} - \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ عفا}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \text{ عفا}}$ لا میں

یعنی $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} - \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ عفا}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \text{ عفا}}$ لا میں

یعنی $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} - \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ عفا}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \text{ عفا}}$ لا میں

پس خاص تکملی ہے $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} - \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ عفا}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \text{ عفا}}$ لا جب لا

اور پورا حل ہے

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} + \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ عفا}} + \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \text{ عفا}} + \frac{1}{\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \text{ عفا}} = \frac{1}{\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \text{ عفا}}$$

امثلہ

۱۔ مندرجہ ذیل کے خاص تکملی حاصل کرو

$$(۱) \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} - \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ عفا}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \text{ عفا}} \quad (۲) \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} - \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ عفا}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \text{ عفا}}$$

$$(۳) \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} - \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ عفا}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \text{ عفا}} \quad (۴) \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} - \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ عفا}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \text{ عفا}}$$

$$(۵) \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} - \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ عفا}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \text{ عفا}} \quad (۶) \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} - \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ عفا}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \text{ عفا}}$$

$$(۷) \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} - \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ عفا}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \text{ عفا}} \quad (۸) \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} - \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ عفا}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \text{ عفا}}$$

$$(۹) \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} - \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ عفا}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \text{ عفا}} \quad (۱۰) \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \text{ عفا}} - \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \text{ عفا}} = \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \text{ عفا}}$$

۲۔ ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

فرض کرو کہ $\frac{فر}{فوت}$ کی بجائے ہم عف کہتے ہیں، اس طرح سے حاصل ہوگا

$$\frac{لا}{فر لا} = \left(\frac{لا}{فر لا} \right)^{۱-۵} = \frac{لا^{۱-۵} فر^{۵}}{فر لا^{۵}} + \frac{لا^{۱-۵} (۱-ن)}{فر لا^{۵}} = \frac{لا^{۱-۵} فر^{۵}}{فر لا^{۵}}$$

$$یا لا^{۱-۵} فر^{۵} = (لا فر لا - ن) (۱+ن) لا^{۱-۵} فر^{۵} = \frac{لا^{۱-۵} فر^{۵}}{فر لا^{۵}}$$

$$= \frac{لا^{۱-۵} فر^{۵}}{فر لا^{۵}} (۱+ن-عف) =$$

اب ن کو بالتواتر ۲، ۳، ۴، کے مساوی رکھنے سے

$$\frac{لا^{۱} فر^{۱}}{فر لا^{۱}} = (۱-عف) لا فر لا = (۱-عف) عف ما$$

$$\frac{لا^{۲} فر^{۲}}{فر لا^{۲}} = (۲-عف) لا^{۲} فر لا = (۲-عف) (۱-عف) عف ما$$

اس لئے عام طور پر

$$\frac{لا^{ن} فر^{ن}}{فر لا^{ن}} = (ن-عف) (۱+ن-عف) (۲+ن-عف) \dots (۱-عف) عف ما$$

یا ان عملوں کی ترتیب الٹنے سے

$$عف (۱-عف) (۲-عف) \dots (ن-عف) (۱+ن-عف) عف$$

مثال - ذیل کی تفرقی مساوات کو حل کرو

$$\frac{لا^{۲} فر^{۲}}{فر لا^{۲}} + \frac{لا^{۲} فر^{۲}}{فر لا^{۲}} + \frac{لا^{۲} فر^{۲}}{فر لا^{۲}} = \frac{لا^{۲} فر^{۲}}{فر لا^{۲}} + لا^{۲} فر لا = لا^{۲} + لا$$

رکھو لا = فوت، اس طرح مساوات ہو جاتی ہے

$$عف (۱-عف) (۲-عف) عف + عف (۲-عف) عف + عف (۱-عف) عف = لا^{۲} + فوت$$

یا (عصا^۱ - عصا^۲ + عصا^۳ - عصا^۴) = ما = قوت^۱ + قوت^۲

یعنی (عصا - ۱) (عصا^۲ + ۳) = ما = قوت^۱ + قوت^۲
جس سے حاصل ہوتا ہے

$$ما = لا قوت + ب ج م ت م + ج ج ب ت م + ق ق ت$$

$$یا ما = لا + ب ج م (م لوک لا) + ج ج ب (م لوک لا) + لا + لا لوک لا$$

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

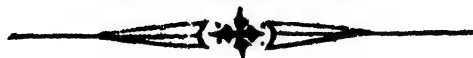
$$۱۔ لا قوت + لا قوت + لا قوت = ق = ما$$

$$۲۔ لا قوت + لا قوت + لا قوت = ق = ما (لوک لا) + لا جب لوک لا
+ جب ق لوک لا$$

$$۳۔ لا قوت + لا قوت + لا قوت = ما + لا + لا لوک لا$$

$$۴۔ لا قوت + لا قوت + لا قوت = ما + لا + لا$$

$$۵۔ (۱ + ب لا) قوت + ب (۱ + ب لا) قوت = ما$$



باب پنجم

قائم مریات، متفرق مساواتیں

قائم مری

۴۸۔ کارٹیشری مساواتیں۔ مساوات (لا، ما، ا) =۔ منحنیات کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے، اب سوال زیر بحث یہ ہے کہ اگر منحنیات کے ایک قبیل کی مساوات دی ہوئی ہو تو ہم ایک ایسے قبیل منحنیات کی مساوات معلوم کریں جس کا ہر ایک رکن پہلے قبیل کے ہر ایک رکن کو علی القوائم قطع کرے۔ جیسا پہلے بتایا گیا ہے ایسے سوالات میں ضروری ہے کہ پہلے قبیل کے تمام رکنوں پر ایک ساتھ عمل کیا جائے، اس لحاظ سے مخصوص کرنے والا مستقل لا اس قبیل کی مساوات میں شریک نہیں ہونا چاہئے، دفعہ ۲ میں بتایا گیا ہے کہ لا ذیل کی دو مساواتوں کے ذریعہ ماسقط ہو سکتا ہے

$$ف (لا، ما، ا) =۔$$

$$جف ف لا + جف ف ما \times جف ف مر لا =۔$$

$$فرض کرو کہ یہ حاصل اسقاط ف (لا، ما، ا) مر لا =۔$$

ہے پس یہ پہلے قبیل کی تفرقی مساوات ہے۔

اب جہاں پہلے نظام کا ایک رکن دوسرے نظام کے ایک رکن کو

قطع کرتا ہے اس نقطہ پر ان دو منحنیات کے تماس علی القوائم ہیں۔
پس اگر اس نقطہ تقاطع کے رواں محدود لمحاظ دوسرے قبیل کے منحنی کے
ضام، عا اور اگر اسی نقطہ کو پہلے قبیل کے مذکورہ منحنی پر خیال کیا جائے
اور اس کے لمحاظ سے اس کے رواں محدود لا، ما ہوں تو

$$\text{ضا} = \text{لا}، \text{عا} = \text{ما}، \frac{\text{حرا}}{\text{حرضا}} = \frac{\text{حرا}}{\text{حرا}}$$

اس لئے دوسرے قبیل کی تفرقی مساوات ہوگی

$$\text{وہ (ضا، عا)۔} \frac{\text{حرضا}}{\text{حرا}} = \text{۔}$$

اور اس کو تکمل کرنے سے پہلے نظام کے قائم مریات کا قبیل حاصل ہوگا۔
اس لئے قاعدہ یہ ہے۔

مساوات معلومہ کو تفرق کرو اور مستقل کو ساقط کرو، پھر $\frac{\text{حرا}}{\text{حرضا}}$ کی بجائے
- $\frac{\text{حرا}}{\text{حرضا}}$ لکھو اور تفرقی مساوات کو تکمل کرو۔

۴۹۔ قطبی مساواتیں۔ اگر منحنی کی ساوا قطبی محدودوں میں دی ہوئی ہو

تو وہ ناویہ جو سمتی نیم قطر تماس کے ساتھ بنانا ہے $\frac{\text{حرا}}{\text{حرضا}}$ ہوگا،
اس صورت میں قاعدہ مذکورہ یہ ہوگا۔

مساوات کو تفرق کرو اور مستقل کو ساقط کرو، پھر $\frac{\text{حرا}}{\text{حرضا}}$ کی

بجائے - $\frac{\text{حرا}}{\text{حرضا}}$ لکھ کر نئی تفرقی مساوات کو تکمل کرو۔

۵۰۔ دائروں کے قبیل $\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ = ۱۲ \text{ لا} \dots \dots (۱)$
کا ہر رکن محور ما کو مبدأ پر مس کرتا ہے، اس قبیل کے قائم مریات

کا نظام معلوم کرو۔

یہاں $لا + ما = \frac{فرما}{فرلا} = لا$

اور لا کو ساقط کرنے سے $لا^۲ + ما^۲ = لا (لا + ما) \frac{فرما}{فرلا}$

یعنی $لا^۲ + لا ما \frac{فرما}{فرلا} - ما^۲ = (۲)$

اس لئے نئی تفرقی مساوات ہوگی

$لا^۲ - لا ما \frac{فرما}{فرلا} - ما^۲ =$

یا $ما^۲ + لا ما \frac{فرلا}{فرما} - لا^۲ =$

جو ایک متجانس مساوات ہے اور اس میں $ما = لا$ رکھنے سے اس کے متغیر الگ ہو سکتے ہیں۔

مگر چونکہ اس مساوات اور مساوات (۲) میں صرف اتنا فرق ہے کہ لا، ما کا باہم تبادلہ کر دیا گیا ہے، اس لئے اس کا تکمیل ہوگا

$ما^۲ + لا^۲ = ۲ ما$

جو دائروں کا ایک اور نظام ہے جس کا ہر ایک رکن محور لا کو مبدأ پر مس کرتا ہے۔

مثال ۲۔ منحنيات $\frac{لا^۲}{لا + لا} + \frac{ما^۲}{ب + ل} = (۱)$

کے قائم مربعات کا نظام معلوم کرو جہاں لہ اس قبیل کا تبدیل ہے۔

یہاں $\frac{لا}{لا + لا} + \frac{ما}{ب + ل} = (۲)$

اور ان دو مساواتوں سے لہ کو ساقط کرنا چاہئے۔

(۲) سے حاصل ہوتا ہے لا (ب' + لہ) + ماما (ل' + لہ) = ۰

$$\text{یا لہ} = - \frac{\text{ب' لا} + \text{لا ماما}}{\text{لا} + \text{ماما}}$$

$$\text{پس ل' + لہ} = \frac{\text{لا} - \text{ب' لا}}{\text{لا} + \text{ماما}}$$

$$\text{اور ب' + لہ} = - \frac{\text{لا} - \text{ب' لا}}{\text{لا} + \text{ماما}}$$

پس اس قبیل کی تفرقی مساوات ہے

$$1 = \frac{\text{لا}^2 (\text{لا} + \text{ماما})}{\text{لا} (\text{لا} - \text{ب' لا})} - \frac{\text{ما}^2 (\text{لا} + \text{ماما})}{\text{لا} (\text{لا} - \text{ب' لا})}$$

$$\text{یا لا}^2 - \text{ما}^2 + \text{لا ماما} (\frac{1}{\text{لا}} - \frac{1}{\text{ما}}) = \text{لا} - \text{ب' لا} \dots\dots\dots (۳)$$

اس لئے ما کی بجائے $\frac{1}{\text{ما}}$ لکھنے سے مطلوبہ مریات کے قبیل کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\text{لا}^2 - \text{ما}^2 + \text{لا ماما} (\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{ما}}) = \text{لا} - \text{ب' لا} \dots\dots\dots (۴)$$

لیکن چونکہ اس میں اور مساوات (۳) میں کوئی فرق نہیں ہے اس لئے اس کا تکمیل بھی وہی ہوگا

$$1 = \frac{\text{لا}^2}{\text{لا} + \text{ما}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{لا} + \text{ما}}$$

جو ایسی مخروطی تراشوں کا ایک نظام ہے جو پہلے نظام کے ساتھ ہم ماسکے ہیں۔

مثال ۳۔ دو کی مختلف قیمتوں کے لئے صنوبری خطوط کے قبیل

لہ = ل (۱ - جم طہ) کے قائم مریات کا نظام معلوم کرو۔

یہاں $\frac{مر}{مرطه} = ا جب طه$
اور او کو سا قاط کرنے سے

$$\frac{مرطه}{مر} = \frac{ا - جم طه}{جب طه} = مس \frac{طه}{۲}$$

اس لئے قائم مریات کے قبیل کے لئے

$$- \frac{ا}{لا} - \frac{مر}{مرطه} = مس \frac{طه}{۲}$$

یا لوک ر = ۲ لوک جم $\frac{طه}{۲}$ + مستقل

یا ر = ب (ا + جم طه)

جو ہم محور صنوبری خطوط کا ایک اور قبیل ہے جن کے قرون کا رخ متقابل سمت میں ہے۔

امثلہ

۱۔ او کی مختلف قیمتوں کے لئے مکافیات $ما' = ۴$ و لا کے قائم مریات کا نظام معلوم کرو۔

۲۔ ثابت کرو کہ م کی مختلف قیمتوں کے لئے متناہہ ناقصوں کے

$$قبیل \frac{لا}{۱۲} + \frac{ما'}{ب'} = م' کے قائم مریات کا نظام$$

$لا' = ا' ماب'$ ہے۔

۳۔ او کی مختلف قیمتوں کے لئے مساوی الزاویہ لولبیوں

کے قبیل ر = او طه م ص کے قائم مریات معلوم کرو۔

۴۔ او کی مختلف قیمتوں کے لئے ہم محور اور ہم ماسکہ مکانیوں

$$\frac{ا}{د} = ا + جم طه کے قائم مریات کا قبیل معلوم کرو۔$$

۵۔ ثابت کرو کہ منحنیات کے قبیل

$$\left\{ \begin{array}{l} ۱ - ۳ لا ما = ۱ \\ ۲ لا ما - ۲ ما = ب \end{array} \right.$$

علی القوائم ہیں۔

۶۔ ثابت کرو کہ منحنیات رجب'عہ = ۱ (جم طہ - جم عہ)

اور ر جنبر'یہ = ۱ (جنبر بہ - جم طہ)

علی القوائم ہیں۔

۷۔ اگر ف (لا + خ ما) = می + خ و تو ثابت کرو کہ

$$می = ۱ اور و = ب$$

قائم منحنیات کے دو نظام ہیں۔

۸۔ ثابت کرو کہ مہ کی کسی مستقل قیمت کے لئے منحنیات کا قبیل

قبیل مہ ممر لا - قمر لا جم ما = مستقل کے منحنیات کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔
[ننڈن سنہ ۱۸۹۰ء]

علم حرکت کی چند مشہور مساواتیں

۵۱۔ مساوات $\frac{فری}{فرطہ} + می = ف (ی)$

ایک ایسے ذرہ کی حرکت کی عام مساوات ہے جو ایک مرکزی قوت کے زیر اثر حرکت کر رہا ہو۔

۲ $\frac{فری}{فرطہ}$ کے ساتھ ضرب دینے اور مکمل کرنے سے

$$\left(\frac{فری}{فرطہ} \right)^2 + می^2 = ف^2 (ی)^2 + ۱$$

جے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں $\int \frac{v}{v^2 + 2v - 1} dv = \frac{v}{v^2 + 2v - 1}$ اس طرح حل عمل میں آسکتا ہے۔

۵۲۔ $\frac{v^2}{v^2 + 2v - 1} + N = f(v)$ مستقل سروں والی ایک خطی مساوات ہے، ایسی مساواتوں پر پہلے بحث ہو چکی ہے ان کا حل اس طرح بھی عمل میں آسکتا ہے۔ جب N طہ کے ساتھ ضرب دو جو مشکل جزو ضربی ہے تسکمل کرنے سے

جب N طہ $\frac{v^2}{v^2 + 2v - 1} - N = f(v)$ جب N طہ $\frac{v^2}{v^2 + 2v - 1} + 1$ اسی طرح جب N طہ مشکل جزو ضربی ہے اور اس کے جواب میں پہلا تسکملی

جب N طہ $\frac{v^2}{v^2 + 2v - 1} + N = f(v)$ جب N طہ $\frac{v^2}{v^2 + 2v - 1} + 1$

$\frac{v^2}{v^2 + 2v - 1}$ کو سا قط کرنے سے

$N = f(v) - \frac{v^2}{v^2 + 2v - 1}$ جب N طہ $\frac{v^2}{v^2 + 2v - 1} + 1$

$\frac{v^2}{v^2 + 2v - 1}$

۵۳۔ ایک ایسے جسم کی مساوات حرکت جس کی کیفیت بدلتی ہو اکثر یہ صورت اختیار کرتی ہے

$$F = \left\{ f(v) - \frac{v^2}{v^2 + 2v - 1} \right\} \cdot S \quad (1)$$

اور اس کا مشکل جزو ضربی فہ (لا) فرت ہے۔

کیونکہ فہ (لا) فرت فرت {فہ (لا) فرت} = سا (لا) فہ (لا) فرت
جس سے حاصل ہوتا ہے $\frac{1}{۲} = \{فہ (لا) فرت\} = سا (لا) فہ (لا) فرت$

$$یا \frac{1}{۲} = \frac{فہ (لا) فرت}{سا (لا) فہ (لا) فرت + ۱} = فرت$$

متغیر جدا ہو گئے ہیں پس حل مطلوب حاصل ہو سکتا ہے۔

مزید توضیحی مثالیں

۵۴۔ کئی مساواتوں کو خاص ترکیبوں سے اوپر کی کسی نہ کسی معیاری صورت میں تحویل کرنے سے حل کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ $\frac{فرت}{(لا + ب + ما)} = ف$
فرض کرو کہ $لا + ب + ما = ی$

تب $لا + ب = \frac{فرت}{ف}$

پس $لا + ب + ن (دی) = \frac{فرت}{ف}$

اور $لا = \frac{فرت}{(لا + ب + ن (دی))}$

یا $لا + ج = \frac{فرت}{(لا + ب + ن (دی))}$

مثال ۲۔ $\frac{لا^2}{حرا} = (ما + لا) \frac{حرا}{حرا} + ۱ = ۰$

رکھو لا ما = ی

تب $ما + لا = \frac{حرا}{حرا} = \frac{حری}{حرا}$

$۰ = لا (\frac{حری}{حرا} - ما) + \frac{حری}{حرا} + ۱ = ۰$

یا $ی = لا = \frac{حری}{حرا} + \frac{۱}{حری}$

جو کلیروی شکل کی مساوات ہے اور اسی کا کامل ابتدائی ہے

لا ما = لا ج + $\frac{۱}{ج}$

مثال ۳۔ $\frac{فوا^2}{حرا} = (۱ - \frac{حرا}{حرا}) + فوا + فوا = \frac{فوا^2}{حرا}$ کو حل کرو

فرض کر دو کہ $فوا = عا$ اور $فوا = ضا$

اب چونکہ یہ مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$(فوا - فوا) \frac{حرا}{حرا} = ۱ + (فوا - فوا) \frac{حرا}{حرا}$

اس لئے اسے ہم یوں لکھ سکتے ہیں

$عا - ضا = \frac{حرا}{حرا} + ۱ = \frac{حرا}{حرا}$

جو کلیروی شکل کی مساوات ہے، اس لئے اس کا کامل ابتدائی ہے

عا = ج ضا + $\sqrt{۱ + ج}$

یا $فوا = ج فوا + \sqrt{۱ + ج}$

مثال ۴- $\lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{a}{b} \right) + (\lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2^2) \left(\frac{a}{b} \right) - \lambda_1 \lambda_2 = 0$.

(ہندسہ محکمات میں یہ مساوات اکثر واقع ہوتی ہے)

اس میں رکھو لا = اس اور ما = بات

مسادات مفروضہ ہو جاتی ہے

$$\frac{1}{\text{اسوت}} \left(\frac{\text{اس ورت}}{\text{ات درس}} + (\text{س} - \text{ت} - \text{ب}) \right) \left(\frac{\text{اس دت}}{\text{ات درس}} - \frac{\text{اس ق}}{\text{اس ق}} \right)$$
$$\text{یا اس } \left(\frac{\text{مرت}}{\text{درس}} \right)^2 + (\text{س} - \text{ت} - \text{ب}) \frac{\text{مرت}}{\text{درس}} - \text{ت} = .$$
$$\text{یعنی ت (1 + \frac{1}{\text{دس}}) = س (1 + \frac{1}{\text{دس}}) - ب \frac{\text{دس}}{\text{دس}}$$

جس سے حاصل ہوتا ہے ت = سی $\frac{\text{دُرت}}{\text{دُرسی}}$ - ب $\frac{\text{دُرت}}{\text{دُرسی}}$

جو کلیروی شکل ہے، اس کا کامل ابتدائی ہے

$$\frac{\text{ب ج}}{\text{ا + ا ج}} - \text{ت} = \text{س ج}$$
$$\frac{b}{1+a} = \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+a}$$

اس کا نادر حل ہے لا ± لا-و ما ± اب

تو یار خطوط مستقیم ہیں۔

مثال ۵۔ (۱+۱) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$ ۔ کو مل کرو

فرض کرو کہ مساوات کو ہم اس طرح تبدیل کرتے ہیں کہ

$$\text{مرت} = \frac{\text{مرت}^2}{1 + \text{لا}^2}$$

اس طرح لا سیدھے تکمل سے بطور ت کے تفاعل کے معلوم ہو سکتا ہے

$$\text{اب} \quad \frac{\text{مرت}^2}{1 + \text{لا}^2} = \frac{\text{مرت}^2}{\text{مرت}}$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{مرت}^2}{1 + \text{لا}^2} - \frac{\text{مرت}^2}{\text{مرت}} = \frac{\text{مرت}^2}{(1 + \text{لا}^2) \times \text{مرت}}$$

$$\text{پس} \quad (1 + \text{لا}^2) \times \frac{\text{مرت}^2}{\text{مرت}} = \frac{\text{مرت}^2}{\text{مرت}} - \frac{\text{مرت}^2}{\text{مرت}} \times \frac{\text{لا}^2}{\text{مرت}}$$

$$\text{پس مساوات معلومہ اس طرح کی مساوات} \quad \frac{\text{مرت}^2}{\text{لا}^2} + \text{ق}^2 = 0$$

میں تحویل ہو جاتی ہے، جس کا حل ہے

$$\text{لا} = \text{ج ب ق ت} + \text{ب ج ق ت}$$

اور جب ت کی قیمت لا کی رقوم میں مندرج کی جاتی ہے تو حل معلوم

ماصل ہوتا ہے۔

[اگر لا مثبت ہو تو

$$\frac{1}{\text{لا}} = \frac{\text{مرت}}{1 + \text{لا}^2}$$

$$\frac{1}{\text{لا}} = \text{ج ب ت}^2 (\text{لا}^2 + 1) = \text{ت}$$

$$\text{اگر لا منفی ہو تو} \quad \frac{1}{\text{لا}} = \frac{\text{مرت}}{1 - \text{لا}^2}$$

یعنی $\frac{1}{x-1}$ جب $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ [ت]

مثال ۶۔ ذیل کی ہمزاد تفرقی مساواتوں کو حل کرو (جو مستقل سرور والی خطی مساواتیں ہیں)

$$۴ = \frac{۴}{x-1} + \frac{۹}{x-2} + \frac{۴}{x-3} + ۴$$

$$۳ = \frac{۳}{x-1} + \frac{۷}{x-2} + \frac{۳}{x-3} + ۳$$

ہم ان مساواتوں کو اس طرح لکھ سکتے ہیں ، عف ، عف کی بجائے لکھا گیا ہے

$$۴ = ۴(۱ + عف) + ۹(۱ + عف) + ۴(۱ + عف) + ۴$$

$$۳ = ۳(۱ + عف) + ۷(۱ + عف) + ۳(۱ + عف) + ۳$$

ان مساواتوں پر بالترتیب ۷ عف + ۳۸ اور ۹ عف + ۴ کے ساتھ عمل کرنے اور تفریق کرنے سے ہم ماکو ساقط کرتے ہیں اور حاصل ہوتا ہے

$$[۴(۱ + عف) + ۷(۱ + عف) - (۳(۱ + عف) + ۷(۱ + عف))] = ۳۸ - ۴$$

$$۷ عف + ۳۸ - ۴ = ۵۸$$

$$یا (۷ عف + ۷ + ۳۱) = ۵۸$$

جس سے ملتا ہے $۷ عف + ۳۱ = ۵۸$ یا $۷ عف = ۲۷$ یا $عف = \frac{۲۷}{۷}$

$$یا ۷ عف + ۳۱ = ۵۸$$

ماکو حاصل کرنے کے لئے ہم $\frac{۲۷}{۷}$ کو اصلی مساواتوں سے ساقط

کرتے ہیں، پہلی مساوات کو ۷ سے اور دوسری کو ۹ سے ضرب دو اور تفریق کرو، اس سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{مردان}}{\text{مرد}} = 2 + 6 + 9 - \text{ت}$$

پس ۶ = ۷ ت - ۹ ت - ۲ لا - $\frac{\text{ملا}}{\text{مرت}}$

$$= 4t - 9 - 2(10 + 9 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) + \frac{19}{3}t - \frac{52}{9} - \frac{29}{6}t$$

$$(عفا^۱ + ۱۶) لا + ۳ عفا^۱ = ۰$$

$$۰ = ۵ عفا^۱ لا + (عفا^۱ + ۹) ما = ۰$$

ان مساواتوں پر بالترتیب عفا^۱ + ۹ اور ۳ عفا^۱ کے ساتھ عمل کرنے اور تفریق کرنے سے ہم ما کو ساقط کرتے ہیں اور حاصل کرتے ہیں

$$[(عفا^۱ + ۱۶) (عفا^۱ + ۹) + ۱۵ عفا^۱] لا = ۰$$

$$یا (عفا^۱ + ۴۰ عفا^۱ + ۱۴۴) لا = ۰$$

$$یعنی (عفا^۱ + ۴) (عفا^۱ + ۳۶) لا = ۰$$

جس سے لا = ۲ جب ۲ ت + ۲ جب ۲ ت + ج جب ۱ ت + ج جب ۱ ت + ج جب ۱ ت
ما کے تفرقی سروں کو ساقط کرنے کے لئے پہلی مساوات کو تفریق کرو
اور دوسری کے سہ چند کو اس سے تفریق کرو اس طرح ملیگا

$$\frac{۳ لا}{۳۱} + \frac{۳۱}{۳۱} = \frac{۳ لا}{۳۱}$$

جس سے ہمیں ما کی قیمت حاصل ہوتی ہے البغیر نئے مستقلوں کو شریک کرنے کے

$$= ۲ - ۲ جب ۲ ت + ۲ جب ۲ ت + ۲ جب ۱ ت - ۲ جب ۱ ت + ج جب ۱ ت$$

امثلہ

$$۱ - ۲ لا ما - \frac{۳۱}{۳۱} (۱ - لا) ما = لا^۲$$

$$۲ - ۲ قتا ما - \frac{۳۱}{۳۱} + ۲ جب ما (\frac{۳۱}{۳۱}) + مس ما = لا$$

$$۳ - (۱ + ۱ لا) \frac{۳۱}{۳۱} + (۱ + ۱ لا) \frac{۳۱}{۳۱} + ب ما = لا$$

$$۴ - (۱ + لا) \frac{۳۱}{۳۱} + ۲ لا (۱ + لا) \frac{۳۱}{۳۱} + ما = ۰$$

$$۵- (۱-لا) \frac{۲}{۲} \frac{۲}{۲} - لا \frac{۲}{۲} + ن'۲ = .$$

$$۶- \frac{۲}{۲} = \frac{۲}{۲} - لا (۲- لا)$$

$$۷- \frac{۲}{۲} = ۲ جب \frac{۲}{۲} لا-۲ \frac{۲}{۲} جم \frac{۲}{۲} لا+۲ \frac{۲}{۲} جم لا$$

۸- ذیل کی تفرقی مساواتوں کے تکلی حاصل کرو

$$(۱) \frac{۲}{۲} \frac{۲}{۲} - ۳ \frac{۲}{۲} + ۹ \frac{۲}{۲} + ۱۳۲ = .$$

$$(ب) \frac{۲}{۲} \frac{۲}{۲} + ۶ \frac{۲}{۲} + ۹۲ = ۲۵ جم لا$$

$$(ج) لا \frac{۲}{۲} - ۵ لا \frac{۲}{۲} + ۱۰۲ = . [آئی، سی، ایس] ۱۸۹۴$$

۹- ذیل کی ہمزاد مساواتوں کے نظام کو حل کرو

$$\frac{۲}{۲} \frac{۲}{۲} + ۱۵۲ + ۳۲ + ۳۰ = .$$

$$\frac{۲}{۲} \frac{۲}{۲} + ۲۲ + ۱۰۲ + ۴ = . [آئی، سی، ایس] ۱۸۹۴$$

۱۰- اس منحنی کی شکل معلوم کرو جس میں رواں مماس کے میلان کا مماس محور لا کے ساتھ اس نقطہ کے محدودوں کے حاصل ضرب کے متناسب ہے۔

۱۱- ایک منحنی میں کسی نقطہ پر کا انحنایہ بدلتا ہے جیسے اس زاویہ کی جیب التمام کا مکعب جو نقطہ مذکورہ پر کا مماس محور لا کے ساتھ بناتا ہے، منحنی کی صورت معلوم کرو۔

۱۲- جس منحنی میں انحنایہ کے نصف قطر کا ظل محور ما پر منقل ہو

اس کے لئے ثابت کرو کہ

$$(1) \quad \infty \text{ لوک مس } \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$(2) \quad \text{ما } \infty \text{ لوک قط } \frac{\pi}{2}$$

نوٹ۔ (۱) میں سی قوس کا طول ہے اور سا مماس کا
میلان ہے محور کا کے ساتھ۔



جوابات

صفحہ (۶)

۱۔ لاس لا۔ لوک قظ لا = ماس ۱۔ لوک قظ ما + ج

$$x = 1 - y + \frac{1-y}{2} + \frac{1-y}{3} - \dots$$

$$1 = (1 + b + y) (z + b + y + b y z - 1)$$

۵۔ $\text{لوک } [1+2] = \text{لوک لا} + \text{مس لا} + \text{ج}$

$$ج + ٢٧ = (٧ - \frac{1}{2})٢ - ٦$$

$$-9 - 6(1) + \frac{y}{2} = 1 \quad (2) \quad 12 + 12 = 24$$

$$ج + ط ۱ = ۱ \text{ (۲)} \quad ۱ = (ط - ج) ۱ \text{ (۳)}$$

۱۰۔ $\frac{1}{2} + \sqrt{1-x} = 0$ کو $\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}$ اگر $x = 1$ جبکہ $x = 0$ ۔

صفی (۱۱)

$$1 - 2\alpha\beta = 2\alpha\beta + \beta^2$$

۲- (اُ + با) = اُبا = ابا ب لا - بجم با لا + ج + و

$$۳ - رط = ا = ط + \frac{ط}{۲+۵}$$

$$۴ - م لا م = ا + ج \quad ۵ - لا و مستا = مس ا + ج$$

$$۶ - ما و لا = لا + ج \quad ۷ - لا + ا + م + و لا = ج + و = \frac{۷۲}{۲}$$

$$۹ - \frac{۱}{لا م} = \frac{۱}{لا م} + ج \quad ۱۰ - \left(\frac{۱}{لا م}\right) = \frac{۱}{لا م} + ج$$

$$۱۱ - \frac{۱}{ما م} = ۱ + ج + و = \frac{۱}{ما م} + ج \quad ۱۲ - لا جب م = \frac{۱}{لا م} + ج$$

$$۱۳ - لا لو کی = \frac{۱}{لا م} + ج \quad ۱۴ - و = و + ج + ا = \frac{۱}{لا م} + ج$$

$$۱۵ - \frac{۱}{ر} = \frac{۱}{ر} + ج + و \quad ۱۶ - \frac{۱}{ر} = \frac{۱}{ر} + ج + و$$

$$۱۸ - (۱) \frac{۱}{لا} = \frac{۱}{لا} + ج \quad (۲) (ا + ب) = و = لا جب ب لا جب ا + ج + و$$

$$(۳) جب م = و + ج \quad (۴) ف (م) + ف (لا) + ج = و$$

صفحہ (۱۶)

$$۱ - \frac{۱}{۲} لوک (و + و) + \frac{۱}{۵۱۲} لوک \frac{۱}{۵۱۲} + \frac{۱}{۵۱۲} لوک \frac{۱}{۵۱۲} + ج جہاں د = \frac{۱}{۲}$$

$$۲ - \frac{۱}{۲} لوک (و + و + و) + \frac{۱}{۲۴۲} لوک \frac{۱}{۲۴۲} + \frac{۱}{۲۴۲} لوک \frac{۱}{۲۴۲} + ج جہاں د = \frac{۱}{۲}$$

$$\frac{1}{2} = \text{جہاں } \frac{1}{2}$$

$$۳ - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \text{ج} - ۴ - \text{ع} \text{ حاصل بقا } = \text{لا} (\text{ع} + \text{ج})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{اور لا} = \frac{\text{ج}}{۳۴} \text{ و } \frac{1}{۲۴} \end{array} \right.$$

۵ - ع حاصل بقا ذیل کی مساواتوں کا

$$۱ = \text{لا} (\text{ع} + \text{ج} + \text{ب} + \text{ع})$$

$$\text{اور لوک لا} \{ \text{ع} + (\text{ب} - ۱) + \text{ج} \}$$

$$+ \frac{۲}{\sqrt{۴۴ - (\text{ب} - ۱)}} - \frac{۲}{\sqrt{۴۴ - (\text{ب} - ۱)}} = \frac{۱ - \text{ب} + \text{ع}}{\sqrt{۴۴ - (\text{ب} - ۱)}}$$

صفحہ (۲۰)

$$۱ - (\text{ب} - ۱) = \text{ج} (\text{ب} + ۱) \quad ۲ - (\text{ب} - ۱) = \text{ج} (\text{ب} + ۱) + ۲$$

$$۳ - \frac{۲}{\sqrt{۴۴ - (\text{ب} - ۱)}} = \text{لوک} \left(\frac{۲}{\sqrt{۴۴ - (\text{ب} - ۱)}} + ۱ - (\text{ب} - ۱) \right) - \frac{۲}{\sqrt{۴۴ - (\text{ب} - ۱)}} = \text{لوک} \left(\frac{۲}{\sqrt{۴۴ - (\text{ب} - ۱)}} + ۱ - (\text{ب} - ۱) \right)$$

$$+ \text{لوک} (\text{ب} - ۱) = \text{ج}$$

$$۴ - (\text{ب} + ۱) \text{ لوک} (\text{ب} - ۱) + (\text{ب} - ۱) \text{ لوک} (\text{ب} + ۱) = \text{ج}$$

$$۵ - \text{لا} - \text{ب} + \text{لوک} (\text{ب} + ۱) = \text{ج}$$

$$۶ - \text{ب} - ۳ = \text{لا} = \text{لوک} (\text{ب} + ۳ + ۲) + \text{ج}$$

$$۷ - \text{ب} + ۴ = \text{لا} = \text{لوک} (\text{ب} + ۳ + ۱۰) + \text{ج} =$$

$$۸ - \text{لا} - \text{ب} - ۴ = \text{لوک} (\text{ب} + ۳ + ۷) = \text{ج}$$

صفحہ (۲۵)

$$۱- م + ۱ = ج + و \quad ۲- م = ۱ + \frac{۲}{۲} + ل + ج$$

$$۳- م + ۱ = \frac{۲}{۲} (۱ + ل) - \frac{۳}{۲} (۱ + ل) + ج = \frac{۱}{۲}$$

$$۴- ل (۱ + ل) = ج + و \quad ۵- م + ۱ = ۳ + م - \frac{۳}{۲} ل + ج$$

$$۶- جم = \left\{ \frac{۱ - (۱ - ل) - م}{ل - ۱} \right\} = ۱ - ل$$

$$۷- ل = \frac{۳}{۲} + ع + ب + ج \quad \begin{cases} م = ۱ + ع + ب \\ ل = ۱ + ق + ب \end{cases}$$

$$۸- م = \frac{۳}{۲} + ق + ب + ج \quad \begin{cases} م = ۱ + ع + ب \\ ل = ۱ + ق + ب \end{cases}$$

صفحہ (۲۸)

$$۱- م = ج + ل + ج' \quad ل + م = ۱$$

$$۲- م = ج + ل + ج' \quad ل + م = ۱$$

$$۳- م = ج + ل + ج' \quad م + (۱ - ل) = ۱$$

$$۴ - م = ج لا + \sqrt{لا ج + ج^۲} ، \sqrt{لا^۲} + \frac{لا^۲}{لا} = \frac{لا^۲}{لا} = ۱$$

$$۵ - م = (لا - ۱) ج - ج^۲ ، (لا - ۱) = م = ۲$$

$$۶ - (م - ج لا) (ج - ۱) = ج ، \sqrt{لا م} + \sqrt{لا} = ۱$$

صفحہ (۳۰)

$$\left. \begin{array}{l} ۱ - م = ع لا + ع \\ لا = \frac{لوک ع - ع - ج}{(۱ - ع)^۲} \end{array} \right\} \begin{array}{l} ۲ - م = ۱ ع لا + ع^۲ \\ لا = ج ع + \frac{ع^۲}{۱ - ۲} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ۳ - م = ع لا + ع^۲ \\ لا (۱ - ع) = ع - ع^۲ + ع^۲ + ج \\ ۴ - م = (ع + ع) لا + \frac{۱}{ع} \\ ع لا = ۱ + ۱ و ع \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ۵ - م = (ع + ع) لا + ع^۱ \\ ع لا = (۱ - ن) + ۱ و \frac{ن}{۱ - ن} ع \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ۶ - م = ۲ ع لا + ع^۲ \\ ع لا = - \frac{ن}{۱ + ن} ع^۱ + ۱ \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ۷-۷ = ۷ + ۷ + ۷ \\ ۷ = \frac{۱}{۱-۱} - \frac{۳}{۲-۱} \frac{۳}{۲-۱} + \frac{۲-۱}{۱-۱} ۷ \end{array} \right.$$

۸- قائم زائد

۹- مکانی جو محوروں کو مس کرتا ہے ۱۰- قطع زائد

۱۱- چار قرون والا در تدویر لا + ما = لا

$$۱۲- ۷ = ۷ (۱-۷)$$

$$۱۳- ۷ = ۷ + ۷ (۱+۷)$$

$$۷ = \frac{۳ \text{ جب } ۱-۷}{\text{جم } ۳-۷}$$

$$۷ = \frac{۳ \text{ جب } ۱-۷}{\text{جم } ۳-۷} \text{ لوک}$$

۱۴- ۷ = ۷ لا - $\frac{۷}{۱+۷}$ فروٹیوں کا ایک سلسلہ جو چار خطوط

ستقیم لا ± ۷ - ۷ = ± ۷ کو مس کرتا ہے ناوطل ہے

صفحہ (۳۶)

$$۱- ۷ = لا \text{ لوک لا } + لا + ۷ = ۷ - ۲ = لا \text{ جمر } (لا + ۷)$$

$$۳- ۷ = لا - لا \text{ لوک لا } + ۷ = ۷ - ۴ = لا \text{ (لا + ۳ لوک) } + ۷$$

$$5 - (لا - ل) + (ما - ب) = ر \quad 6 - لا + ب = ک \quad \frac{\text{فرما}}{\sqrt{لا^2 + ب^2 - 1}} = \frac{1}{2}$$

$$6 - ما + ب = ک \quad \sqrt{لا^2 + ب^2 - 1} = لا \quad \text{فرلا}$$

$$8 - \frac{ما}{لا} = ک \quad \left(\frac{1}{لا} + \frac{1}{ب} \right) \sqrt{لا^2 + ب^2 - 1} = \frac{1}{2} \quad \text{فرلا + ب}$$

$$9 - ما = ب \quad \text{مس} \quad \frac{لا + ما + 1}{ب}$$

$$10 - لا + 1 + \frac{\sqrt{لا^2 - 1}}{ما} + جب = ما$$

$$11 - ما = ب \quad لا - لا لوک لا$$

صفحہ (۴۲)

$$1 - لا^2 ما = ق + لا^2 + ب لا + ج$$

$$2 - (لا^2 + جب لا) = ما = جم لا + لا^2 + ب لا + ج$$

$$3 - (د) لا^2 ما - 3 لا^2 ما + 2 لا ما + (لا - 2) ما = ق + 1$$

$$(ب) لا ما - ما + \frac{ما}{لا} = ق + 1$$

$$(ج) لا^2 ما - 2 لا^2 ما + 1 لا^2 ما - 2 لا^2 ما + 1 لا^2 ما - 2 لا^2 ما + 1 لا^2 ما$$

$$+ \frac{1}{2} (لا^2 + ما) = لا (لوک لا) + 1$$

$$۱۲ - ۱۱ = (۱ + ۱ + ۱) \text{ جب } ۱ + ۱ + ۱ \text{ (ج + د + لا) جم } ۱ + ۱ + ۱ \text{ ع جب } ۱ + ۱ + ۱$$

$$+ \text{ف جم } ۱ + ۱ + ۱ \text{ گ } ۱ + ۱ + ۱ \text{ جب } ۱ + ۱ + ۱ \text{ (ج + د + لا) جم } ۱ + ۱ + ۱ \text{ و } ۱ + ۱ + ۱ \text{ (ج + د + لا) جم } ۱ + ۱ + ۱$$

$$+ \text{ح } ۱ + ۱ + ۱ \text{ جب } ۱ + ۱ + ۱ \text{ (ج + د + لا) جم } ۱ + ۱ + ۱ \text{ و } ۱ + ۱ + ۱ \text{ (ج + د + لا) جم } ۱ + ۱ + ۱$$

صفحہ (۵۹)

$$۱ - (۱) \frac{۱}{۴} (۲) \frac{۱}{(۲+۱)(۱+۱)} (۳) \frac{۱}{۱۲۰} + \frac{۱}{۱۲۰} \frac{۱}{۱۲۰}$$

صفحہ (۶۲)

$$\frac{۱}{۶۰} \frac{۱}{۶۰} - \text{و جب لا} \frac{۱}{۶۰} \text{ لا } \frac{۱}{۶۰} \text{ لوک } \frac{۱}{۶۰} \frac{۱}{۶۰}$$

صفحہ (۶۳)

$$۱ - \frac{۱}{۶۰} \frac{۱}{۶۰} \text{ (ج + د + لا) جم } ۱ + ۱ + ۱ \text{ (ج + د + لا) جم } ۱ + ۱ + ۱ \text{ (ج + د + لا) جم } ۱ + ۱ + ۱$$

$$\frac{۱}{۶۰} - \frac{۱}{۶۰} \text{ جم } ۱ + ۱ + ۱ \text{ (ج + د + لا) جم } ۱ + ۱ + ۱ \text{ (ج + د + لا) جم } ۱ + ۱ + ۱$$

$$\frac{۱}{۶۰} \left\{ \frac{۱}{۶۰} \text{ جب } ۱ + ۱ + ۱ \text{ (ج + د + لا) جم } ۱ + ۱ + ۱ \text{ (ج + د + لا) جم } ۱ + ۱ + ۱ \right\}$$

$$\frac{۱}{۶۰} \text{ (جب لا جنر لا - جم لا جنر لا)}$$

$$۲ - \frac{1}{4} \text{ جب } ۲ \text{ لا، } \frac{1}{4} \text{ جم لا، } - \frac{3}{16} \text{ جب } ۲ \text{ لا}$$

صفحہ (۶۵)

$$\frac{\text{قو (جب لا جم لا) قو لا } ۴ \text{ لا (۱-قو) جب لا (۱-قو) + (۱-قو) + (۱-قو) (۱+قو) جم لا}{(۱+قو)}$$

۲- جم لا جنر لا

صفحہ (۶۷)

$$۱ - \frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۲} \text{ لا، } \frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲} \text{ لا، } \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \text{ لا، } \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \text{ لا}$$

$$۲ - \text{قو} \left(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴} \text{ لا، } \frac{۵}{۱۸} + \frac{۱۹}{۱۰۸} \right) \text{ قو} \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \text{ لا} \right) + \text{قو} \left(\frac{۳}{۸} + \frac{۱}{۴} \right)$$

$$۳ - \frac{۱}{۲} \text{ قو (لا جب لا جم لا) - قو} \left(\frac{۳}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰} \text{ لا، } \frac{۳}{۵} + \frac{۱}{۵} \text{ لا} \right) \text{ جم لا، } \frac{۳}{۵} + \frac{۱}{۵} \text{ لا جب لا}$$

صفحہ (۷۲)

$$۱ - (۱) - \frac{لا جم لا}{۲} (۲) \frac{لا جب لا}{۴} (۳) \frac{لا جنر لا}{۲}$$

$$(۴) \text{ قو} \left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} \text{ لا} \right) (۵) \frac{لا قو}{۲} (۶) \frac{لا (جنر لا + جم لا)}{۴}$$

$$(۷) \frac{لا}{۲ (قو + لا)} \left(\frac{قو}{۲} + \frac{قو}{۲} - \frac{قو}{۲} \right) (۸) \frac{لا جب لا جب لا}{۲}$$

$$۲ - (۱) = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۴$$

$$(۲) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا}$$

$$(۳) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا}$$

$$+ \frac{1}{5} (\text{جب لا} - \text{جم لا})$$

$$(۴) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا}$$

$$+ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا}$$

$$(۵) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا}$$

$$(۶) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا}$$

$$(۷) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا}$$

$$+ \frac{1}{2} (\text{جم لا} - \text{لا جبر لا})$$

$$(۸) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا}$$

$$(۹) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا}$$

$$(۱۰) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{لا جبر لا}$$

۳۔ رکھو $ل + ب + لا = قو$ ، ما = ج $(ل + ب + لا)$ + د $(ل + ب + لا)$ م

$$- \frac{ل}{ب + ب} + \frac{ل + ب + لا}{ب (ب + ل + ب)}$$

جہاں م، م، مساوات ب + م + (ل + ب - ب) م + ب =۔
کی اصلیں ہیں۔

۴۔ رکھو ی = سن لا، ما = (ل + لا + ب) / لا + لا

۵۔ رکھو ی = جب لا، ما = (جب (ن جب لا)

+ ب جم (ن جب لا)

۶۔ رکھو $قو = ضا$ ، $قو = عا$ ، $(قو - قو + ا) = قو = ل$

۷۔ رکھو جب لا = ضا، جب ما = عا، (جب ما - جب لا + ا) قو = ل

۸۔ (ل) ما = ل قو + ب قو جب ۳ لا + ج قو ل جم ۳ لا

(ب) ما = (ل + ب لا) قو + ل جم ۲ لا + ل جم ۳ جب لا

(ج) ما = ل لا جب (لوک لا) + ب لا ل جم (لوک لا)

۹۔ ما + ۲ = ل جب ۳ لا + ب جم ۳ لا + ج جب ۳ لا + د جم ۳ لا

۳ ی = ۶ - (ل جب ۳ لا + ب جم ۳ لا) + (ج جب ۳ لا + د جم ۳ لا)

۱۰۔ ما = ل قو
۱۱۔ ما = ک لا + ل لا + ب

دست

فہرست اصطلاحات

Canonical form

صورت آئینی

Clairaut's form

کلیر دی صورت

Commutative law

قانون مبادلہ

Complementary Function

متمم تفاعل

Complete primitive

کامل ابتدائی

Distributive law

قانون تقسیمی

Elimination

اسقاط

"Exact" Differential Equations

"ٹھیک" یا حاضر مساواتیں

Homogeneous Equations

متجانس مساواتیں

Index law

قانون قوت نما

Irreversible process

غیر انقلاب پذیر عمل

Linear Equations

خطی مساواتیں

Operator

عامل

Order

رتبہ

Orthogonal trajectory

قائم مری

Particular integral

خاص تکمیلی

Rigid Dynamics

استوار اجسام کا علم حرکت

Singular Solution

نادر حل

تقریب

$$\frac{dy}{dx} \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{ect}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{وغیرہ}$$

$$\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}$$

$$\int f(x) dx$$

$$\int f(x) dx$$

$$D \left(\frac{d}{dx} \right)$$

$$D \left(\frac{d}{dx} \right)$$

